U.F.R. STMIA
École doctorale IAE+M
DFD Mathématiques

THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1

en Mathématiques

par

Sébastien KERNER

Répartition d'entiers avec contraintes sur les diviseurs

soutenue publiquement le 19 décembre 2002 devant le jury composé de MM. et Mme

P. Sargos	Président	Professeur à l'Université Henri Poincaré
M. Balazard	Rapporteur	Chargé de recherches CNRS, Université Bordeaux I
R. de la Bretèche	Rapporteur	Maître de conférences à l'École Normale Supérieure
C. Dartyge	Examinatrice	Maître de conférences à l'Université Henri Poincaré
É. Fouvry	Examinateur	Professeur à l'Université de Paris XI
G. Tenenbaum	Directeur de thèse	Professeur à l'Université Henri Poincaré

Institut Élie Cartan CNRS UMR 9973
Faculté des Sciences - B.P. 239 - 54506 Vandœuvre-lès-Nancy CEDEX

Remerciements

Je voudrais en premier lieu remercier mon directeur de thèse, Gérald Tenenbaum. Sa disponibilité, son soutien, son exigence sans faille d'obtenir les meilleurs résultats et son regard profond sur la théorie analytique des nombres sont sans aucun doute les catalyseurs de la réussite de cette thèse.

Je suis sensible à l'honneur que me fait Patrick Sargos en acceptant de présider mon jury. Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à Régis de la Bretèche et Michel Balazard d'avoir accepté la lourde responsabilité d'être rapporteurs. Je remercie également Cécile Dartyge et Étienne Fouvry pour leur participation à ce jury.

J'ai eu la chance tout au long de ma thèse de bénéficier des connaissances et des remarques pertinentes des membres de l'équipe de théorie des nombres de Nancy ainsi que de l'ambiance chaleureuse qu'il y règne.

Je suis d'autre part redevable à l'institut Élie Cartan pour son accueil et les excellents moyens mis à ma disposition.

La partie la plus personnelle de ces remerciements s'adresse naturellement d'abord à ma famille : à mes parents, auxquels est dédié ce travail ; à mon frère, ma grand-mère, mon oncle, ma tante et mes cousins… Leur indispensable présence et leur soutien moral tout au long de ce travail ont été inversement proportionnels à leur compréhension du sujet.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement tous mes amis. Les Nancéiens : Patrick, Gabrielle, Christophe, Florent, Olivier, Bertrand, Vi, Édouard… Mes amis d'enfance : Muriel et toute la troupe des Bucyrigaliens & co qui sont trop nombreux et trop importants pour que je me risque à en oublier un en les énumérant tous… Les Parisiens : JunioR, Landy, Vincent, Cédrik,… Et le très madrilène David… Je leur dois à tous d'avoir rendu agréables ces trois années de thèse.

Et puis merci à Jean-Michel Chazal, sans qui cette thèse n'aurait pas eu lieu.

Enfin, c'est indirectement grâce à cette thèse que j'ai fait la rencontre d'Isabelle. Et c'est à elle que je m'adresse pour ces derniers remerciements. Mon cœur, je voudrais te dédier ce travail. Tu l'as fortement motivé, certainement influencé et peut-être même inspiré… Tu en as, en tous cas, soutenu l'édifice moral durant cette dernière année… Pour tout cela et pour bien d'autres choses encore, je te remercie…

À mes parents,

à Isabelle.

Table des matières

Notations

• La lettre p, avec ou sans indice, désigne un nombre premier.
• $a \,|\, b$ signifie que a divise b et $p^\nu \,\|\, n$ signifie que $p^\nu \,|\, n$ et $p^{\nu+1} \nmid n$.
• Nous désignons le cardinal d'un ensemble fini $\mathcal{A}$ par $|\mathcal{A}|$.
• (a, b) désigne le pgcd des entiers a et b.
• Sauf mention contraire, la lettre γ désigne la constante d'Euler.
• $p_j(n)$ désigne le j-ième facteur premier de l'entier n.
• $\Omega(n) := \sum_{p^\nu \,\|\, n} \nu$ et $\omega(n) := \sum_{p \,|\, n} 1$.
• μ est la fonction de Möbius : $\mu(n) = (-1)^{\omega(n)}$ si n est sans facteur carré ; $\mu(n) = 0$ sinon.
• $\tau(n) = \sum_{d \,|\, n} 1$ est le nombre de diviseurs de n.
• $\varphi(n) := \sum_{1 \leqslant m \leqslant n,\, (m,n)=1} 1$ est la fonction indicatrice d'Euler.
• $P^+(n)$ et $P^-(n)$ désignent respectivement le plus grand et le plus petit facteur premier de l'entier n, avec les conventions $P^+(1) = 1$ et $P^-(1) = +\infty$.
• La lettre χ désigne, sauf mention contraire, un caractère de Dirichlet.
• $\vartheta(x) := \sum_{p \leqslant x} \log p$ désigne classiquement la fonction de Chebychev.
• $\pi(x) := \sum_{p \leqslant x} 1$.
• $\Phi(x, y) := \sum_{n \leqslant x,\ P^-(n) > y} 1$.
• Pour tout nombre réel x, nous notons $[x]$ sa partie entière, $\{x\}$ sa partie fractionnaire, $\|x\|$ la distance de x aux entiers, c'est-à-dire $\|x\| := \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$ et, pour $x > 0$, nous posons $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$.
• La densité naturelle d'une suite d'entiers $\mathcal{A}$ est définie, sous réserve d'existence, par $\mathrm{d}\mathcal{A} := \lim_{x \to \infty} x^{-1} |\{a \leqslant x : a \in \mathcal{A}\}|$.
• Nous utilisons la mention pp (presque partout) pour indiquer qu'une relation est satisfaite sur un ensemble d'entiers de densité naturelle unité.
• s désigne un nombre complexe et nous définissons implicitement les nombres réels σ et τ par la relation $s = \sigma + i\tau$.
• ζ désigne la fonction zêta de Riemann.
• $\log_k$ désigne la k-ième itérée de la fonction logarithme.
• Nous utilisons indifféremment la notation de Landau $f = O(g)$ et celle de Vinogradov $f \ll g$ pour signifier que $|f| \leqslant C|g|$ pour une constante positive C, qui peut être abolue ou dépendre de certains paramètres, auquel cas la dépendance pourra être indiquée en indice.
• La notation $f \asymp g$ signifie que $f \ll g$ et $g \ll f$ ont simultanément lieu.

Introduction

Cette thèse est consacrée à plusieurs études de répartitions d'ensembles de nombres entiers caractérisés par des propriétés de leurs diviseurs. Le travail se compose de trois parties.

Dans la première de ces parties, nous utilisons la méthode du col en une variable pour étudier la répartition des nombres entiers sans facteur carré dont le k-ième facteur premier est fixé. Plus précisément, nous donnons, pour tout nombre premier p et uniformément dans le domaine $1 \leqslant k < \pi(p)$, une estimation de la densité naturelle

$$\lambda_k^*(p) := \text{dens}\,\{n : \mu(n)^2 = 1,\ p_k(n) = p\}.$$

Le problème se ramène facilement à l'estimation de la somme

$$\sigma_k^*(y) := \sum_{\substack{\omega(n)=k \\ P^+(n)\leqslant y}} \frac{\mu(n)^2}{n} \qquad (k \geqslant 1,\ y \geqslant 2), \tag{0·1}$$

uniformément sur le domaine $1 \leqslant k < \pi(y)$. On a en effet

$$\lambda_k^*(p) = \frac{6}{\pi^2 p F(1,p)} \sigma_{k-1}^*(p-) = \frac{\sigma_{k-1}^*(p-)}{\mathrm{e}^\gamma p \log p}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log p}\Big)\Big\}, \tag{0·2}$$

où l'on a posé

$$F(z,y) := \prod_{p\leqslant y}\Big(1 + \frac{z}{p}\Big) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Suivant une méthode introduite par Erdős et Tenenbaum dans [3], nous évaluons la somme $\sigma_k^*(y)$ à l'aide de la méthode du col en une variable. Notre estimation dépend, comme d'habitude avec cette méthode, d'un point-selle $\varrho = \varrho(k,y)$ défini comme l'unique solution réelle positive de l'équation

$$\varrho \frac{F'(\varrho,y)}{F(\varrho,y)} = \sum_{p\leqslant y} \frac{\varrho}{p+\varrho} = k.$$

Nous obtenons ainsi l'estimation suivante de $\sigma_k^*(y)$.

Théorème I. *On a, uniformément pour $1 \leqslant k < \pi(y)$ et $\varrho = \varrho(k,y)$,*

$$\sigma_k^*(y) = \frac{\varrho^{-k} F(\varrho,y)}{W(k)\sqrt{\delta_2}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{k+\log_2 y} + \frac{1}{\pi(y)-k}\Big)\Big\} \tag{0·3}$$

où $W(k) := k!\,\mathrm{e}^k k^{-k-1/2}$ et

$$\delta_2 = \delta_2(k,y) := k - \sum_{p\leqslant y} \frac{\varrho^2}{(p+\varrho)^2} \asymp \min\{k + \log_2 y\,;\, \pi(y) - k\}.$$

Par l'intermédiaire de la formule (0·2), il découle naturellement de ce résultat une estimation similaire pour $\lambda_k^*(p)$ uniformément sur le domaine $1 \leqslant k < \pi(p)$.

Il est clair que $\sigma_k^*(y) = 0$ si $k > \pi(y)$ et $\sigma_{\pi(y)}^*(y) = \prod_{p \leqslant y} 1/p$. L'estimation (0·3) a donc l'avantage d'être satisfaite sur le domaine optimal $1 \leqslant k < \pi(y)$. En contrepartie, le terme principal dépend de la quantité implicite ϱ. On peut cependant pallier ce défaut en introduisant dans (0·3) une évaluation explicite du point-selle ϱ. De manière synthétique, cette évaluation est de la forme

$$\varrho \asymp \frac{k}{L} \qquad \text{où} \qquad L \asymp \log\Big(\frac{\log y}{\log\big(ky/\pi(y)\big)}\Big).$$

Il s'ensuit que l'on a, uniformément pour $1 \leqslant k < \pi(y)$,

$$\sigma_k^*(y) = \frac{L^k}{k!} \exp\Big\{O\Big(\frac{k^2}{\pi(y)-k}\Big)\Big\}.$$

Un des autres avantage de la formule (0·3), c'est qu'elle peut fournir des renseignements sur le comportement local de $\sigma_k^*(y)$, c'est-à-dire des estimations, dites *semi-asymptotiques*, des rapports $\sigma_{k'}^*(y)/\sigma_k^*(y)$ et $\sigma_k^*(y')/\sigma_k^*(y)$ lorsque k' et y' sont respectivement proches de k et y. Nous obtenons, dans ce cadre, l'évaluation, uniforme pour $1 \leqslant k < \pi(y)$,

$$\frac{\sigma_{k+1}^*(y)}{\sigma_k^*(y)} \asymp \frac{L}{k}. \tag{0·4}$$

Comme le remarque Balazard dans [2], on peut montrer que la suite $k \mapsto \sigma_k^*(y)$ est unimodale, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k_0 = k_0(y)$ telle la suite $k \mapsto \sigma_k^*(y)$ soit croissante pour $k \leqslant k_0$ et décroissante pour $k > k_0$. Cela découle du fait que les $\sigma_k^*(y)$ forment la suite des coefficients du polynôme $z \mapsto F(z,y)$. L'estimation (0·4) nous permet, par exemple, de retrouver et de préciser le comportement d'unimodalité, pour y assez grand, de la suite $k \mapsto \sigma_k^*(y)$ (et, par conséquent, de la suite $k \mapsto \lambda_k^*(y)$) pour $|k - \log_2 y| \geqslant c$, où c est une constante absolue assez grande.

La deuxième partie de la thèse est consacrée à une autre situation où la méthode du col s'applique : l'estimation de la répartition des entiers dont le nombre des facteurs premiers distincts est fixé, autrement dit l'évaluation de la quantité $\pi_k(x) := |\{n \leqslant x : \omega(n) = k\}|$.

Lorsque le nombre réel x est fixé, la suite $k \mapsto \pi_k(x)$ stationne à la valeur 0 à partir du rang $k = K_x$, où $K_x := \max_{n \leqslant x} \omega(n)$. Le théorème des nombres premiers fournit l'estimation suivante de K_x :

$$K_x = \Big(1 + \frac{1+o(1)}{\log_2 x}\Big)\frac{\log x}{\log_2 x} \qquad (x \to +\infty). \tag{0·5}$$

Le domaine d'étude de $\pi_k(x)$ est donc l'intervalle $1 \leqslant k \leqslant K_x$.

En 1988, Hildebrand et Tenenbaum [4] ont montré que l'on pouvait évaluer uniformément $\pi_k(x)$ dans le domaine $1 \leqslant k \ll K_x/\log_2 x$ à l'aide de la méthode du col en dimension 2. Nous prenons la suite de leur travaux pour les « grandes » valeurs de k en donnant, pour tout $\varepsilon > 0$, une évaluation uniforme de $\pi_k(x)$ pour x assez grand et

$$1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon} \qquad \text{où} \qquad K_{x,\varepsilon} := \Big(1 + \frac{1-\varepsilon}{\log_2 x}\Big)\frac{\log x}{\log_2 x}.$$

Posons

$$F(z,s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \prod_p \Big(1 + \frac{z}{p^s - 1}\Big)$$

et considérons le système de deux équations à deux inconnues ϱ et α, défini par

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_p \frac{1}{p^\alpha - 1 + \varrho} = \frac{k}{\varrho}, \\ &\sum_p \frac{\varrho \log p}{(1 - p^{-\alpha})(p^\alpha - 1 + \varrho)} = \log x. \end{aligned}\right. \tag{0·6}$$

La première étape de notre raisonnement consiste à démontrer que ce système admet une solution unique $(\varrho, \alpha) = \big(\varrho(k,x), \alpha(k,x)\big)$. Nous établissons ensuite les estimations de $F(z,s)$ et du point-selle (ϱ,α) nécessaires à notre analyse ainsi que les lemmes fondamentaux de la méthode du col en dimension 2. Nous appliquons enfin la méthode du col à l'intégrale double

$$\pi_k(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{|z|=\varrho} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{z^{-k} x^s F(z,s)}{zs} \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}z$$

pour obtenir l'estimation suivante de $\pi_k(x)$.

Théorème II. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour x assez grand, $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, $\alpha = \alpha(k,x)$ et $\varrho = \varrho(k,x)$, on a, avec la notation $W(t) := \Gamma(t) t^{-t+1/2}\,\mathrm{e}^t$,*

$$\pi_k(x) = \frac{\varrho^{-k} x^\alpha F(\varrho,\alpha)}{W(k) W(\varrho) \alpha \sqrt{\delta}} \Big\{1 + O_\varepsilon\Big(\frac{(\log_2 x)^5}{\sqrt{k} + (\log_2 x)^6}\Big)\Big\}, \tag{0·7}$$

où δ désigne le hessien de l'application $g : (\vartheta, \tau) \longmapsto \log F(\varrho\,\mathrm{e}^{i\vartheta}, \alpha + i\tau)$ au point $(0,0)$. En particulier, sous les mêmes conditions et pour $k \gg (\log_2 x)^{12}$, on a

$$\pi_k(x) = \frac{\varrho^{-k} x^\alpha F(\varrho,\alpha)}{2\pi\alpha\sqrt{\delta}} \Big\{1 + O_\varepsilon\Big(\frac{(\log_2 x)^5}{\sqrt{k}}\Big)\Big\}. \tag{0·8}$$

Comme dans le cas de $\sigma_k^*(y)$, la méthode du col fournit un résultat sur un large domaine de valeurs de k. En effet, on peut constater que la proportion $K_{x,\varepsilon}/K_x$ de l'intervalle $[1, K_x]$ sur laquelle notre estimation est vérifiée est asymptotiquement égale à l'unité.

En contrepartie, la méthode du col fournit de manière spécifique un résultat dépendant de quantités, ϱ, α et δ, définies implicitement. On peut, comme pour $\sigma_k^*(y)$, donner des estimations explicites de ces quantités et déduire de (0·7) une évaluation asymptotique de $\log \pi_k(x)$ pour les grandes valeurs de k. Par souci de clarté, nous ne présentons ici que des ordres de grandeur des quantités implicites α, $\varrho^{1/\alpha}$ et δ. On a ainsi, uniformément pour x assez grand et $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$,

$$\alpha - 1 \asymp \frac{\varrho^{1/\alpha}}{\log x} \asymp \frac{k}{(\log x)\log(K_x/k)} \ll 1 \qquad \text{et} \qquad \delta \asymp (\log x)^2 \Big(1 - \frac{k}{K_x}\Big) \log\Big(\frac{K_x}{k}\Big).$$

On en déduit, uniformément pour $(\log_2 x)^2 \ll k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, un ordre de grandeur de $\log \pi_k(x)$, donné par la formule

$$\log \pi_k(x) \asymp k \log\Big\{\frac{x}{k} \log\Big(\frac{K_x}{k}\Big)\Big\}.$$

Nous déduisons, par ailleurs, de l'estimation (0·7) des formules semi-asymptotiques pour les petites variations en k et en x. En particulier, dans le cas du comportement local de la suite $k \mapsto \pi_k(x)$, nous obtenons, uniformément pour x assez grand et $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$,

$$\frac{\pi_{k+1}(x)}{\pi_k(x)} \ll \frac{1}{k} \log\Big(\frac{K_x}{k}\Big) \ll \frac{\log_2 x}{k}\cdot \tag{0·9}$$

Cette majoration est liée à un résultat obtenu en 1990 par Michel Balazard [1]. Résolvant une ancienne conjecture de Paul Erdős, Balazard a démontré que la suite $k \mapsto \pi_k(x)$ est unimodale pour chaque x assez grand.

Pour $k \ll K_x/\log_2 x$, l'évaluation du rapport $\pi_{k+1}(x)/\pi_k(x)$ qui découle de l'estimation de $\pi_k(x)$ obtenue par Hildebrand et Tenenbaum permet de préciser la croissance de la suite $k \mapsto \pi_k(x)$ pour $k \leqslant \log_2 x - C$ (où C désigne une constante absolue) et sa décroissance pour $k \geqslant \log_2 x + C$.

Dans l'intervalle $|k - \log_2 x| \leqslant C$, Balazard s'appuie sur une amélioration de la formule de Sathe–Selberg pour lever l'incertitude sur le signe de $\pi_{k+1}(x) - \pi_k(x)$; il précise ainsi la valeur de $k_0 = k_0(x)$ tel que $\pi_{k_0}(x) = \max_k \pi_k(x)$.

Pour démontrer la décroissance de $k \mapsto \pi_k(x)$ pour les valeurs de k supérieures à k_0, Balazard développe une méthode originale, indépendante du résultat d'Hildebrand et Tenenbaum, fondée sur un raisonnement par récurrence. Son procédé ne fournit toutefois qu'une estimation théorique du type $\pi_{k+1}(x)/\pi_k(x) = o(1)$. La majoration (0·9) permet donc à la fois de retrouver la décroissance de la suite $k \mapsto \pi_k(x)$ pour $K_x/\log_2 x \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, par une méthode différente de celle de Balazard, mais aussi de préciser que la suite décroît très rapidement lorsque k devient « grand ».

La troisième et dernière partie de la thèse est consacrée à l'étude de la répartition divisorielle normale de ϑd modulo 1, où ϑ désigne un nombre réel et d parcourt l'ensemble des diviseurs d'un entier normal. Une version étendue des résultats qui y sont obtenus fera ultérieurement l'objet d'une co-publication avec Gérald Tenenbaum.

On dit d'une propriété portant sur les nombres entiers qu'elle est *normale* ou encore *vérifiée pp (presque partout)* si elle est satisfaite sur un ensemble d'entiers de densité naturelle égale à l'unité. On dit alors d'une suite d'entiers $\mathcal{B}$ qu'elle est *de Behrend* si

$$\tau(n,\mathcal{B}) := \sum_{d\,|\,n,\ d\in\mathcal{B}} 1 \geqslant 1 \qquad \text{(pp)}.$$

Sans raison structurelle pour que la suite $\{\vartheta d : d\,|\,n\}$ ait une répartition modulo 1 particulière, un raisonnement heuristique d'équirépartition modulo 1 conduit à la conjecture

$$\min_{d\,|\,n} \|\vartheta d\| = \frac{1}{\tau(n)^{1+o(1)}} \qquad \text{(pp)}. \tag{0·10}$$

Dans le Corollaire 9 de [7], Tenenbaum déduit d'un raisonnement général sur la discrépance divisorielle de la fonction arithmétique $g_\vartheta(k) = \vartheta k$ une majoration de $\min_{d\,|\,n} \|\vartheta d\|$ dans le cas où ϑ est un irrationnel algébrique. Mais la nature même de l'argument ne lui permet pas d'obtenir la majoration attendue puisque la conjecture standard pour la majoration de la discrépance fournit $\min_{d\,|\,n} \|\vartheta d\| \leqslant \tau(n)^{-1/2+o(1)}$.

Dans cette partie de la thèse, nous développons, pour traiter le problème (0·10), une technique, adaptée à la fonction arithmétique g_ϑ, issue des procédés de construction de suites de Behrend. Nous obtenons ainsi la majoration optimale contenue dans (0·10) dans le cas où ϑ appartient à un ensemble $\mathcal{E}$ de nombre réels contenant les nombres algébriques et dont le complémentaire est de mesure de Hausdorff nulle.

Avant d'énoncer notre résultat, nous décrivons l'ensemble $\mathcal{E}$. Pour chaque nombre réel ϑ, nous désignons par $\{p_j(\vartheta)/q_j(\vartheta)\}_{j\geqslant 1}$ la suite des réduites de ϑ et nous définissons l'ensemble $\mathcal{E}$ des nombres irrationnels ϑ pour lesquels

$$\log q_{j+1}(\vartheta) \leqslant \{\log q_j(\vartheta)\}^{1+o(1)} \qquad (j \to +\infty). \tag{0·11}$$

Le critère de Liouville permet de déduire sans difficulté que $\mathcal{E}$ contient tous les irrationnels algébriques. Par ailleurs, il découle d'un théorème de Khintchine que le complémentaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ est bien de mesure de Hausdorff nulle.

Notons encore que la minoration contenue dans (0·10) peut être établie par une méthode décrite dans la remarque qui suit le Corollaire 9 de [7]. La preuve développée de cette minoration figurera dans l'article [5].

Nous pouvons alors énoncer notre résultat principal.

Théorème III-1. *Pour tous les nombres ϑ de l'ensemble $\mathcal{E}$, on a*

$$\min_{d\,|\,n} \|d\vartheta\| = \frac{1}{\tau(n)^{1+o(1)}} \qquad \text{(pp)}.$$

Nous en déduisons le corollaire suivant.

Corollaire III. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour tous les nombres ϑ de l'ensemble $\mathcal{E}$, l'ensemble*

$$\mathcal{B}(\vartheta,\varepsilon) := \{n \geqslant 2 : \|\vartheta n\| \leqslant \tau(n)^{-1+\varepsilon}\}$$

est une suite de Behrend.

La démonstration de la majoration contenue dans le Théorème III utilise des résultats assez délicats sur les classes de congruence modulo $q_j(\vartheta)$. Il nous paraît intéressant de citer l'un d'entre eux. Nous y donnons en effet, pour tout nombre réel $b \geqslant 1$, une majoration totalement uniforme en $y \geqslant 2$ de la moyenne, sur les caractères de Dirichlet χ de module q non principaux, de $|L(1,\chi;y)|^b$ où $L(1,\chi;y)$ désigne la somme sur les entiers y-friables définie par

$$L(s,\chi;y) := \sum_{P^+(n)\leqslant y} \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad (s \in \mathbb{C}).$$

On notera que nous ne perdons qu'un facteur $(\log_2 2q)^b$ par rapport au majorant que l'on obtient classiquement dans le cas où $y = +\infty$. χ_0 désigne le caractère principal.

Théorème III-2. *Soit $b \geqslant 1$. On a, pour $q \geqslant 2$, $y \geqslant 2$,*

$$\sum_{\substack{\chi(\bmod q)\\ \chi\neq\chi_0}} |L(1,\chi;y)|^b \ll \varphi(q)(\log_2 2q)^b. \tag{0·12}$$

Plus précisément, on a sous les mêmes hypothèses

$$\sum_{\chi(\bmod q)} |L(1,\chi;y)|^b \ll \varphi(q)\left\{1 + \frac{(\log y)^b(\log_2 2q)^b}{(\log q)^b}\right\} \tag{0·13}$$

et

$$\sum_{\substack{\chi(\bmod q)\\ \chi\neq\chi_0}} |L(1,\chi;y)|^b \ll \varphi(q)\left\{1 + \frac{(\log q)^b(\log_2 2q)^b}{(\log y)^b}\right\}. \tag{0·14}$$

La méthode que nous employons pour démontrer la majoration contenue dans le Théorème III est empruntée à l'article [6] de Maier et Tenenbaum. Nous la décrivons ici pour sa grande généralité.

Pour tous nombres entiers $n \leqslant x$ et $k \geqslant 2$, nous notons $r_k := \exp\exp k$ et $n_k := \prod_{p^\nu \| n,\ p \leqslant r_k} p^\nu$. L'idée essentielle de la preuve est de démontrer que si n_k ne satisfait pas l'inégalité attendue pour une valeur de k proche de $(1-\varepsilon)\log_2 x$, alors la probabilité conditionnelle pour que n_{k+r}, avec r petit, ne la satisfasse pas non plus n'est pas trop proche de 1. Un raisonnement par récurrence permet alors de conclure.

Plus précisément, nous commençons par déduire de la définition de l'ensemble $\mathcal{E}$ une propriété d'approximation rationnelle de $\vartheta \in \mathcal{E}$ par l'une de ses réduites dont la taille du dénominateur q_j est controlée. Nous construisons ensuite, pour tout entier $n \leqslant x$ tel que $\min_{d \mid n_k} \|\vartheta d\| > \tau(n)^{-1+\varepsilon}$, un ensemble de « bonnes » classes de congruence modulo q_j tel que si n possède un facteur premier $p > r_k$ dans l'une de ces classes alors il existe un entier r, petit, tel que $\min_{d \mid n_{k+r}} \|\vartheta d\| \leqslant \tau(n)^{-1+\varepsilon}$. Le point-clef de la démonstration consiste alors à justifier que le nombre de « bonnes » classes est usuellement proche de $\varphi(q_j)$, autrement dit que la plupart des classes de congruence modulo q_j sont « bonnes » ; c'est ce que nous prouvons à l'aide d'un argument de variance dans lequel intervient de manière centrale la majoration (0·12) du Théorème III-2.

Bibliographie

[1] Balazard M., Unimodalité de la distribution du nombre de diviseurs premiers d'un entier, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **40** 2 (1990), 255—270.

[2] M. Balazard, Quelques exemples de suites unimodales en théorie analytique des nombres, *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux* **2** (1990), 13—20.

[3] Erdős P., Tenenbaum G., Sur les densités de certaines suites d'entiers, *Proc. London Math. Soc.* (3) **59** (1989), 417—438.

[4] Hildebrand A. & Tenenbaum G., On the number of prime factors of an integer, *Duke Mathematical Journal* **56** 3 (1988), 471—501.

[5] Kerner S. & Tenenbaum G., Sur la répartition divisorielle normale de $\vartheta d \pmod 1$, en préparation.

[6] Maier H. & Tenenbaum G., On the set of divisors of an integer, *Invent. Math.* **76** (1984), 121—128.

[7] Tenenbaum G., Uniform distribution on divisors and Behrend sequences, *Enseign. Math.* **42** (1996), 355—367.

Répartition des entiers sans facteur carré dont le k-ième facteur premier est fixé

Sébastien Kerner

Sommaire

1. Introduction

Pour tout nombre entier naturel n, nous notons $\omega(n)$ le nombre de ses facteurs premiers distincts et $P^+(n)$ son plus grand facteur premier (avec les conventions $\omega(1) = 0$ et $P^+(1) = 1$). Nous désignons par $\{p_j(n)\}_{1\leqslant j\leqslant\omega(n)}$ la suite croissante des facteurs premiers de n. Dans tout ce travail, les lettres p et q désignent des nombres premiers.

Soit $y \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Désignons par μ la fonction de Möbius et posons

$$\sigma_k^*(y) := \sum_{\substack{\omega(n)=k\\ P^+(n)\leqslant y}} \frac{\mu(n)^2}{n}. \tag{1·1}$$

Cette somme apparait naturellement dans l'étude de la répartition des entiers n sans facteur carré tels que $p_k(n)$ est fixé. Considérons en effet la densité naturelle $\lambda_k^*(p)$ définie par

$$\lambda_k^*(p) := \text{dens}\,\{n : \mu(n)^2 = 1,\ p_k(n) = p\}. \tag{1·2}$$

On a

$$\lambda_k^*(p) = \sum_{\substack{q_1<\cdots<q_{k-1}<p\\ q_j \text{ premier}}} \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{m\leqslant N/(q_1\cdots q_{k-1}p)\\ P^-(m)>p}} \mu(m)^2.$$

Le Théorème I.3.11 de [10] permet d'estimer la somme intérieure. On obtient ainsi

$$\sum_{\substack{m\leqslant N/(q_1\cdots q_{k-1}p)\\ P^-(m)>p}} \mu(m)^2 = \frac{6}{\pi^2}\frac{N}{q_1\ldots q_{k-1}p}\prod_{q\leqslant p}\Big(1+\frac{1}{q}\Big)^{-1} + o_p(N).$$

Il s'ensuit que

$$\lambda_k^*(p) = \frac{6}{\pi^2 p}\prod_{q\leqslant p}\Big(1+\frac{1}{q}\Big)^{-1}\sigma_{k-1}^*(p-) = \frac{\sigma_{k-1}^*(p-)}{\mathrm{e}^{\gamma} p\log p}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log p}\Big)\Big\}. \tag{1·3}$$

L'estimation de la somme $\sigma_k^*(y)$ suffit donc à préciser le comportement asymptotique de $\lambda_k^*(p)$.

On trouve dans l'article [8] d'Erdős et Tenenbaum une étude similaire pour la densité

$$\lambda_k(p) := \text{dens}\,\{n : p_k(n) = p\}. \tag{1·4}$$

Le crible d'Erastosthène fournit pour $\lambda_k(p)$ la formule

$$\lambda_k(p) = \frac{1}{p}\prod_{q\leqslant p}\Big(1-\frac{1}{q}\Big)\sigma_{k-1}(p)$$

avec

$$\sigma_k(y) := \sum_{\substack{\omega(n)=k\\ P^+(n)<y}} \frac{1}{n} \qquad (k\geqslant 1,\ y\geqslant 2).$$

On retrouve donc une formule du type de (1·3) dans laquelle seule l'évaluation de $\sigma_{k-1}(p)$ présente une difficulté. La technique développée par les deux auteurs pour estimer cette somme repose sur la méthode du col. Ils obtiennent ainsi une estimation uniforme de $\sigma_{k-1}(p)$, et par conséquent de $\lambda_k(p)$, sur le domaine $1 \leqslant k \leqslant p^{1-\varepsilon}$ (pour tout $\varepsilon > 0$ fixé). Cette évaluation est utilisée dans l'article [9] de de Koninck et Tenenbaum pour étudier la loi de répartition du k-ième facteur premier d'un entier.

Nous adoptons la même démarche qu'Erdős et Tenenbaum. À l'aide de la méthode du col, nous estimons $\sigma_k^*(y)$ uniformément sur l'ensemble du domaine $1 \leqslant k < \pi(y)$. Il en découle logiquement une estimation de $\lambda_k^*(p)$ sur le domaine $1 \leqslant k < \pi(p)$.

On a évidemment $\sigma_k^*(y) = 0$ si $k > \pi(y)$ et $\sigma_{\pi(y)}^*(y) = \prod_{p\leqslant y} 1/p$ donc le domaine $1 \leqslant k < \pi(y)$ est optimal.

1.1. Description de la méthode

Le point de départ est l'identité

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sigma_j^*(y) z^j = F(z,y),$$

où la fonction F est définie, pour $z \in \mathbb{C}$, par

$$F(z,y) := \prod_{p \leqslant y} \Big(1 + \frac{z}{p}\Big)\cdot \tag{1·5}$$

On en déduit que, pour tout $r > 0$,

$$\sigma_k^*(y) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=r} F(z,y) z^{-k-1} \mathrm{d}z. \tag{1·6}$$

On se restreint alors au cas où $1 \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$. Sous cette condition, nous justifions (dans le Lemme 2) l'existence et l'unicité d'une fonction col $\varrho = \varrho(k,y)$ définie implicitement pour $y \geqslant 2$ par l'équation

$$\varrho \frac{F'(\varrho,y)}{F(\varrho,y)} = \sum_{p \leqslant y} \frac{\varrho}{p + \varrho} = k. \tag{1·7}$$

Le principe de la preuve est d'évaluer l'intégrale de Cauchy (1·6) par la méthode du col en choisissant à cet effet le contour $|z| = \varrho$. La contribution principale à l'intégrale (1·6) est alors donnée par un petit voisinage autour du point-selle ϱ, dans lequel la formule de Taylor fournit l'ordre de grandeur de la fonction intégrée.

1.2. Résultats

Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant, typique de la méthode du col. Posons

$$W(k) := k! \mathrm{e}^k k^{-k-1/2}, \tag{1·8}$$

de sorte que, d'après la formule de Stirling, on a $W(k) = \sqrt{2\pi}\{1 + O(1/k)\}$. Notons $\log_\ell$ la ℓ-ième itérée de la fonction logarithme.

Théorème 1. *On a, uniformément pour* $1 \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$ *et* $\varrho = \varrho(k,y)$*,*

$$\sigma_k^*(y) = \frac{\varrho^{-k} F(\varrho,y)}{W(k)\sqrt{\delta_2}} \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{k + \log_2 y} + \frac{1}{\pi(y) - k}\Big)\Big\} \tag{1·9}$$

où

$$\delta_2 = \delta_2(k,y) := k - \sum_{p \leqslant y} \frac{\varrho^2}{(p+\varrho)^2} \asymp \min\{k + \log_2 y\,;\, \pi(y) - k\}\cdot$$

De plus, on a, uniformément pour $1 \leqslant k \leqslant \pi(p) - 1$, $\varrho^* = \varrho(k-1, p-)$ *et* $\delta_2^* = \delta_2(k-1,p-)$*,*

$$\lambda_k^*(p) = \frac{6}{\pi^2} \frac{(\varrho^*)^{1-k} F(\varrho^*, p-)}{pF(1,p-)W(k-1)\sqrt{\delta_2^*}} \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{k + \log_2 p} + \frac{1}{\pi(p) - k}\Big)\Big\} \tag{1·10}$$

Comme il se doit, l'évaluation implicite (1·9) fournit des formules explicites lorsqu'on y insère une approximation convenable de ϱ.

Considérons la fonction

$$g(x) := x\log(1+1/x) \qquad (x>0). \tag{1·11}$$

Cette application définit une bijection croissante de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$ dont la réciproque est notée g^{-1}. Posons alors

$$h(x) := \frac{1}{g^{-1}(1/x)} \qquad (x>1). \tag{1·12}$$

On a, uniformément pour $x>1$,

$$h(x) = \begin{cases} 2\log x\,\{1+O(\log x)\} & (x\to 1),\\ x\log x + x\log_2 x + O(x\log_2 x/\log x) & (x\to+\infty),\end{cases} \tag{1·13}$$

et donc, uniformément pour $x>1$,

$$h(x) \asymp x\log x. \tag{1·14}$$

Définissons le paramètre w par

$$w = w(k,y) := \frac{\pi(y)}{k}\cdot \tag{1·15}$$

Introduisons enfin le paramètre L défini par

$$L = L(k,y) := \frac{h(w)}{w\log w}\log\Big(\frac{\log y}{\log(y/w)}\Big) \tag{1·16}$$

de sorte que

$$L \asymp \log\Big(\frac{\log y}{\log(y/w)}\Big)\cdot$$

Lemme 1. *On a, uniformément pour $1\leqslant k\leqslant \pi(y)-1$,*

$$\varrho = \frac{k}{L}\Big\{1+O\Big(\frac{\log_3 y}{\log_2 y}\Big)\Big\}\cdot \tag{1·17}$$

Nous pouvons alors énoncer le corollaire suivant qui fournit une évaluation asymptotique de $\sigma_k^*(y)$ lorsque $k=o(\log_2 y/\log_3 y)$ et de $\log\sigma_k^*(y)$ pour les valeurs supérieures de k.

Corollaire 1. *On a, uniformément pour $1\leqslant k\leqslant \pi(y)-1$,*

$$\sigma_k^*(y) = \frac{\{1+k/(yL)\}^{kw}L^k}{k!}\exp\Big\{O\Big(k\frac{\log_3 y}{\log_2 y}\Big)\Big\}\cdot \tag{1·18}$$

De plus, on a, uniformément pour $1\leqslant k\leqslant \pi(p)-1$, $L^* := L(k-1,p)$, $w^* := w(k-1,p)$,

$$\lambda_k^*(p) = \frac{6}{\pi^2 pF(1,p-)}\frac{\{1+(k-1)/(pL^*)\}^{(k-1)w^*}(L^*)^{k-1}}{(k-1)!}\exp\Big\{O\Big(k\frac{\log_3 p}{\log_2 p}\Big)\Big\}\cdot \tag{1·19}$$

On sait par ailleurs que la méthode du col permet l'étude du comportement local et l'obtention de formules *semi-asymptotiques*. Dans le cas des petites variations en k, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 2. *On a, uniformément pour* $1 \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$,

$$\frac{\sigma_{k+1}^*(y)}{\sigma_k^*(y)} = \frac{L}{k}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_3 y}{\log_2 y}\Big)\Big\}. \tag{1·20}$$

De plus, on a, uniformément pour $1 \leqslant k \leqslant \pi(p) - 1$, $L^* := L(k-1, p)$,

$$\frac{\lambda_{k+1}^*(p)}{\lambda_k^*(p)} = \frac{L^*}{k-1}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_3 p}{\log_2 p}\Big)\Big\}. \tag{1·21}$$

Dans le cas des petites variations en y, nous obtenons le résultat suivant où nous posons

$$\varepsilon_{k,y} := \frac{1}{k + \log_2 y} + \frac{1}{\pi(y) - k}.$$

Corollaire 3. *Uniformément pour* $1 \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$ *et*

$$|\eta| \leqslant \frac{L \log w}{\log y} \frac{\log_3 y}{\log_2 y},$$

on a

$$\frac{\sigma_k^*(y^{1+\eta})}{\sigma_k^*(y)} = (1+\eta)^{k/L} \exp\Big\{O\Big(\frac{k}{L}\mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}} + |\eta|\frac{k \log_3 y}{L \log_2 y} + \varepsilon_{k,y}\Big)\Big\}. \tag{1·22}$$

De plus, uniformément pour $1 \leqslant k \leqslant \pi(p) - 1$, $L^* := L(k-1, p)$, $w^* := w(k-1, p)$ *et*

$$|\eta| \leqslant \frac{L^* \log w^*}{\log p} \frac{\log_3 p}{\log_2 p},$$

on a

$$\frac{\sigma_k^*(p^{1+\eta})}{\sigma_k^*(p)} = \frac{(1+\eta)^{(k-1)/L^*}}{p^\eta} \exp\Big\{O\Big(\frac{k}{L^*}\mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}} + |\eta|\frac{k \log_3 p}{L^* \log_2 p} + \varepsilon_{k,p}\Big)\Big\}. \tag{1·23}$$

2. Démonstrations

2.1. Existence et estimation du col

Commençons par justifier l'existence de la fonction col définie par (1·7).

Lemme 2. *Pour tout* $y \geqslant 3$ *et tout entier* $1 \leqslant k < \pi(y)$, *l'équation (1·7) admet une solution unique* $\varrho = \varrho(k, y) > 0$.

Démonstration. L'assertion découle du fait que le membre de gauche de (1·7) croît de 0 à $\pi(y) - 0$ lorsque ϱ parcourt $[0, +\infty[$. □

Nous allons maintenant énoncer quatre lemmes dans lesquels nous estimons la fonction col ϱ. Les trois premiers résultats fournissent des estimations de ϱ sur trois domaines distincts (et complémentaires) du paramètre k. Le quatrième donne une estimation valable sur l'ensemble du domaine $1 \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$. Elle est, en contrepartie, moins précise que les trois premières sur leurs domaines respectifs de validité.

Notre premier résultat est un lemme dans lequel nous présentons des évaluations de ϱ pour les « petites » valeurs de k. La démonstration de ce lemme est calquée sur celle du Lemme 1 de [8]. Nous posons

$$\log^+ x = \max\{\log x\,;\,0\} \qquad (x > 0). \tag{2·1}$$

Lemme 3. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour $y \geqslant 3$ et $k \leqslant y^{1-\varepsilon}$, on a uniformément*

$$\varrho = \frac{k}{M_0}\Big\{1 + O_\varepsilon\Big(\frac{1}{R_0}\Big)\Big\} = \frac{k}{L_0}\Big\{1 + O_\varepsilon\Big(\frac{\log(1+L_0)}{L_0}\Big)\Big\} \tag{2·2}$$

où

(2·3)

$$L_0 = \log\Big(\frac{\log y}{\log(k+1)}\Big), \quad M_0 = \log\Big(\frac{\log y}{1 + \log^+(k/L_0)}\Big) \quad \textit{et} \quad R_0 = L_0\{1 + \log^+(k/L_0)\}.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Nous procédons comme dans la preuve du Lemme 1 de [8]. Pour montrer (2·2), on peut supposer $y \geqslant y_0(\varepsilon)$. En effet, dans le cas contraire, (2·2) équivaut à la majoration $\varrho \ll_\varepsilon 1$, trivialement réalisée. Si $y_0(\varepsilon)$ est assez grand, on a

$$\varrho \leqslant y^{1-\varepsilon/2} \tag{2·4}$$

puisque dans la circonstance opposée, on aurait

$$\sum_{p \leqslant y} \frac{\varrho}{p + \varrho} > \sum_{p \leqslant y} \frac{y^{1-\varepsilon/2}}{2y} = \frac{\pi(y)}{2y^{\varepsilon/2}} > y^{1-\varepsilon} \geqslant k.$$

Maintenant, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{p \leqslant y} \frac{1}{p + \varrho} &= \sum_{\varrho \leqslant p < y} \frac{1}{p} + O\Big(\frac{1}{\varrho}\sum_{p \leqslant y} 1 + \sum_{\varrho \leqslant p \leqslant y} \frac{\varrho}{p(p+\varrho)}\Big) \\ &= \log\Big(\frac{\log y}{1 + \log^+ \varrho}\Big) + O\Big(\frac{1}{1 + \log^+ \varrho}\Big)\cdot\end{aligned}$$

En reportant dans (1·7), il vient

$$\frac{k}{\varrho} = \log\Big(\frac{\log y}{1 + \log^+ \varrho}\Big) + O\Big(\frac{1}{1 + \log^+ \varrho}\Big)\cdot \tag{2·5}$$

Remarquons que (2·4) et (2·5) impliquent

$$\varrho \ll k \tag{2·6}$$

d'où

$$1 \ll \frac{\log(k+1)}{1 + \log^+ \varrho} \ll \frac{k}{\varrho}\cdot$$

En insérant à nouveau cette évaluation dans (2·5), on obtient

$$k/\varrho = L_0 + O\big(1 + \log^+(k/\varrho)\big). \tag{2·7}$$

Pour L_0 grand, c'est-à-dire $k \leqslant y^\eta$ où $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, la relation (2·7) implique $k \asymp \varrho L_0$ puis

$$k/\varrho = L_0 + O(\log L_0). \tag{2·8}$$

Cette estimation est encore valable lorsque $y^\eta < k \leqslant y^{1-\varepsilon}$ puisqu'elle équivaut alors à (2·6). On obtient donc la seconde estimation de (2·2). En particulier, on a

$$1 + \log^+ \varrho = 1 + \log^+(k/L_0) + O(1)$$

qui, reportée dans (2·5), donne la première estimation de (2·2). □

Notre résultat suivant présente des évaluations de ϱ pour les valeurs « moyennes »de k. Rappelons que le paramètre w et la fonction h ont été définis par (1·15) et (1·12).

Lemme 4. *Il existe quatre constantes absolues ε_0, c_1, c_2, c_3 strictement positives telles que*

(i) *Uniformément pour*

$$y^{1-\varepsilon_0} \leqslant k \leqslant c_1\pi(y),$$

on a

$$\varrho = \frac{k}{L_1}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_2 w}{\log w}\Big)\Big\}, \tag{2·9}$$

où

$$L_1 := \log\Big(\frac{\log y}{\log(y/w)}\Big)\cdot \tag{2·10}$$

(ii) *Uniformément pour*

$$y^{c_2} \leqslant k \leqslant \Big(1 - c_3\frac{(\log_2 y)^2}{\log y}\Big)\pi(y),$$

on a

$$\varrho = \frac{k}{L_2}\Big\{1 + O\Big(\frac{w(\log w)^2 + w(\log_2 w)^2}{(w-1)(\log w)\log y}\Big)\Big\}, \tag{2·11}$$

où

$$L_2 := \frac{h(w)}{w\log y}\cdot \tag{2·12}$$

Démonstration. On suppose donc $k \geqslant y^{1-\varepsilon_0}$ où $\varepsilon_0 > 0$ sera choisi suffisamment petit au cours de la démonstration. L'estimation (2·2) montre que pour ces valeurs de k on a $\varrho \gg y^{1-\varepsilon_0}$. D'après le théorème des nombres premiers, on a (en posant $\varrho_y = \min(y, \varrho)$)

$$\sum_{p \leqslant y} \frac{\varrho}{p+\varrho} = J_y(\varrho) + O\Big(\varrho_y \mathrm{e}^{-\sqrt{1+\log^+ \varrho_y}}\Big) \qquad \text{avec} \qquad J_y(\varrho) = \int_2^y \frac{\varrho \,\mathrm{d}t}{(t+\varrho)\log t}. \tag{2·13}$$

On a

$$J_y(\varrho) = \varrho \int_{2+\varrho}^{y+\varrho} \frac{\mathrm{d}t}{t \log t} + \mathcal{E} = \varrho \log\Big(\frac{\log(y+\varrho)}{\log(2+\varrho)}\Big) + \mathcal{E}$$

avec

$$\mathcal{E} := \varrho \int_2^y \frac{\log(1+\varrho/t)\mathrm{d}t}{(t+\varrho)\log(t+\varrho)\log t} \ll \sqrt{\varrho} + \frac{\varrho \log(2+\varrho/y)}{\big\{\log(2+\varrho)\big\}^2(1+\varrho/y)}.$$

On a, pour $1/\log y \ll c \ll \log y$,

$$\begin{aligned}\log\Big(\frac{\log(y+cy)}{\log(2+cy)}\Big) &= \log\Big\{1 + \frac{\log(1+1/c)}{\log(2+cy)} + O\Big(\frac{1}{cy\log y}\Big)\Big\}\\ &= \frac{\log(1+1/c)}{\log y}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log(c+1/c)}{\log y}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Cela implique, pour les mêmes valeurs de c,

$$J_y(cy) = g(c)\frac{y}{\log y}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log(c+1/c)}{\log y}\Big)\Big\} + O\Big(\frac{y\log(2+1/c)}{(1+1/c)(\log y)^2}\Big).$$

Comme $g(c) = 1 - 1/(2c) + O(1/c^2)$ pour $c > 1$ et compte tenu de la croissance en ϱ de $J_y(\varrho)$, on en déduit l'existence d'une constante positive κ telle que, pour tout k satisfaisant à $k \leqslant (1 - \kappa/\log y)\pi(y)$, on a $\varrho \ll y \log y$. Dans un premier temps, on suppose donc que

$$y^{1-\varepsilon} \leqslant k \leqslant \Big(1 - \frac{\kappa}{\log y}\Big)\pi(y). \tag{2·14}$$

On a alors, pour y assez grand, $y^{1-\varepsilon_0} \ll \varrho \ll y \log y$ et donc

$$\log\Big(\frac{\log(y+\varrho)}{\log(2+\varrho)}\Big) = \log\Big(1 + \frac{\log\big(1+(y-2)/(\varrho+2)\big)}{\log(\varrho+2)}\Big) \asymp \frac{\log(1+y/\varrho)}{\log \varrho} \tag{2·15}$$

et

$$\frac{\log(2+\varrho/y)}{\{\log(2+\varrho)\}^2\,(1+\varrho/y)} \ll \frac{\log(1+y/\varrho)}{\log \varrho}\,\frac{\log(2+\varrho/y)}{(\log y)(1+\varrho/y)\log(1+y/\varrho)}.$$

Posons $u := y/\varrho$. Sous la condition (2·14), on peut donc énoncer que l'on a

$$\varrho \log\Big(\frac{\log(y+\varrho)}{\log(2+\varrho)}\Big) = k\Big\{1 + O\Big(\frac{u\log(2+1/u)}{(\log y)(1+u)\log(1+u)}\Big)\Big\} \tag{2·16}$$

et

$$\varrho\frac{\log(1+y/\varrho)}{\log y} \asymp k. \tag{2·17}$$

Commençons par établir (ii). Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\log(y+\varrho)}{\log\varrho} &= \frac{1+\log(1+1/u)/\log y}{1-(\log u)/\log y}\\ &= \Big(1+\frac{\log(1+1/u)}{\log y}\Big)\Big\{1+\frac{\log u}{\log y}+O\Big(\frac{(\log u)^2}{(\log y)^2}\Big)\Big\}\\ &= 1+\frac{\log(1+u)}{\log y}+O\Big(\frac{1+(\log u)^2}{(\log y)^2}\Big),\end{aligned}$$

et donc

$$\log\Big(\frac{\log(y+\varrho)}{\log\varrho}\Big)=\frac{\log(1+u)}{\log y}+O\Big(\frac{1+(\log u)^2}{(\log y)^2}\Big).$$

Reportons dans (2·16) et multiplions par $1/\pi(y)$. Il suit

$$\frac{\log(1+u)}{u}+O\Big(\frac{1+(\log u)^2}{u\log y}\Big)=\frac{1}{w}\Big\{1+O\Big(\frac{u\log(2+1/u)}{(\log y)(u+1)\log(1+u)}\Big)\Big\}$$

soit encore

$$\frac{\log(1+u)}{u}\Big\{1+O\Big(\frac{1+(\log u)^2}{(\log y)\log(1+u)}\Big)\Big\}=\frac{1}{w}\Big\{1+O\Big(\frac{u\log(2+1/u)}{(\log y)(u+1)\log(1+u)}\Big)\Big\}.$$

Pour des constantes positives convenables c_2 et c_3 et sous la condition supplémentaire suivante

$$y^{c_2}\leqslant k\leqslant\Big(1-c_3\frac{(\log_2 y)^2}{\log y}\Big)\pi(y), \tag{2·18}$$

on en déduit que

$$\frac{\log(1+u)}{u}=\frac{1}{w}\Big\{1+O\Big(\frac{1+(\log u)^2}{(\log y)\log(1+u)}\Big)\Big\}. \tag{2·19}$$

Il est facile de constater que

$$g(1/z)=\begin{cases}1-z/2+O(z^2) & (z\to 0^+),\\ (\log z)/z+O(1/z^2) & (z\to+\infty),\end{cases}$$

d'où l'on tire

$$h(x)\asymp x\log x \tag{2·20}$$

uniformément pour $x>1$ et, plus précisément,

$$h(x)=\begin{cases}2\log x\,\{1+O(\log x)\} & (x\to 1),\\ x\log x+x\log_2 x+O(x\log_2 x/\log x) & (x\to+\infty).\end{cases} \tag{2·21}$$

Le théorème des fonctions implicites fournit alors $h'(x)/h(x)\asymp 1/(x-1)$ uniformément pour $x>1$. On déduit donc de (2·19) que, sous la condition (2·18), on a

$$\varrho=\frac{y}{h(w)}\Big\{1+O\Big(\frac{w(\log w)^2+w(\log_2 w)^2}{(w-1)(\log w)\log y}\Big)\Big\}$$

ce qui démontre (ii). Cette formule fournit un équivalent asymptotique pour ϱ dès que

$$\frac{|\log_2 w|}{(w-1)\sqrt{\log y}}\longrightarrow 0\qquad\text{et}\qquad\frac{\log w}{\log y}\longrightarrow 0.$$

Passons à la démonstration de l'assertion (i). Plaçons nous, *a priori*, sur le domaine

$$y^{1-\varepsilon} \leqslant k \leqslant \Big(1 - c_3 \frac{(\log_2 y)^2}{\log y}\Big)\pi(y)$$

et posons $\varrho_1 = y/h(w)$. En prenant $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, on a $\varrho \asymp \varrho_1$ d'après (2·17), (2·20) et (2·11). On a donc

$$\frac{\log(y+\varrho)}{\log \varrho} = \frac{\log(y+\varrho_1) + O(1)}{\log \varrho_1 + O(1)} = \frac{\log(y+\varrho_1)}{\log \varrho_1}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}$$

qui, reportée dans (2·16), donne

$$\varrho\Big\{\log\Big(\frac{\log(y+\varrho_1)}{\log \varrho_1}\Big) + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\} = k\Big\{1 + O\Big(\frac{\log(2+1/u)}{\log y}\Big)\Big\}.$$

En insérant l'estimation (2·15), il vient pour w assez grand (disons $k < c_1\pi(y)$ avec $c_1 > 0$ suffisamment petite),

$$\varrho \log\Big(\frac{\log(y+\varrho_1)}{\log \varrho_1}\Big) = k\Big\{1 + O\Big(\frac{\log(2+1/u)}{\log y} + \frac{1}{\log w}\Big)\Big\}$$

et donc

$$\varrho = \frac{k}{\log\big(1/\{1 - \log h(w)/\log y\}\big)}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log w}\Big)\Big\}$$

On obtient, grâce à (2·21), l'estimation

$$\log\Big(\frac{1}{1 - \log h(w)/\log y}\Big) = \log\Big(\frac{\log y}{\log(y/w)}\Big)\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_2 w}{\log w}\Big)\Big\}.$$

Le résultat (i) se déduit des deux dernières formules. □

Pour compléter l'évaluation de la fonction col ϱ, nous présentons dans le lemme suivant une estimation valable pour les « grandes » valeurs de k.

Lemme 5. *Avec les notations du Lemme 4, il existe une constante absolue $c_4 > 0$ telle qu'uniformément pour $c_4\pi(y) \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$, on ait*

$$\varrho = \frac{k}{L_2}\Big\{1 + O_{c_4}\Big((w-1) + \frac{1}{\log y}\Big)\Big\}. \tag{2·22}$$

Démonstration. Avec le Lemme 4, on justifie l'existence d'un nombre réel $c_4 > 0$ telle que pour $c_4\pi(y) \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$, on ait $\varrho > y$. Dans ce cas, on écrit

$$k = \sum_{p \leqslant y} \frac{\varrho}{p+\varrho} = \sum_{p \leqslant y} \Big\{1 - \frac{p}{\varrho} + O\Big(\frac{p^2}{\varrho^2}\Big)\Big\}$$

d'où l'on tire

$$\varrho = \frac{y}{u_1}\{1 + O(u_1)\},$$

avec $u_1 := y\big(\pi(y) - k\big)/\big(\sum_{p \leqslant y} p\big)$. En écrivant $\sum_{p \leqslant y} p = \frac{1}{2} y\pi(y)\{1 + O(1/\log y)\}$, on constate que $h(w) = u_1\big\{1 + O\big((w-1) + 1/\log y\big)\big\}$, d'où

$$\varrho = \frac{y}{h(w)}\Big\{1 + O\Big((w-1) + \frac{1}{\log y}\Big)\Big\},$$

ce qui démontre le résultat attendu. □

Nous sommes maintenant en mesure de fournir une estimation de ϱ valide sur l'ensemble du domaine $1 \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$. Rappelons que

$$L := \frac{h(w)}{w \log w} \log\Big(\frac{\log y}{\log(y/w)}\Big)\cdot$$

Lemme 6. *Uniformément pour $1 \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$, on a*

$$\varrho = \frac{k}{L}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_3 y}{\log_2 y}\Big)\Big\}\cdot \tag{2·23}$$

Plus précisément, si $y^{1-\varepsilon} \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$, on a

$$\varrho = \frac{k}{L}\Big\{1 + O\Big(\frac{(\log_2 y)^{2/3}}{(\log y)^{1/3}}\Big)\Big\}\cdot$$

Démonstration. Pour $k \leqslant y^{1-\varepsilon_0}$, on vérifie sans difficultés que

$$M_0 = L\bigg\{1 + O\bigg(\frac{1}{L_0}\log\Big(\frac{\log(y/w)}{1 + \log^+(k/L_0)}\Big)\bigg)\bigg\}$$

donc, d'après (2·2), on a

$$\varrho = \frac{k}{L}\bigg\{1 + O\bigg(\frac{1}{L_0}\log\Big(\frac{\log(y/w)}{1 + \log^+(k/L_0)}\Big)\bigg)\bigg\} \qquad (k \leqslant y^{1-\varepsilon_0}). \tag{2·24}$$

Pour $y^{1-\varepsilon_0} \leqslant k \leqslant c_1\pi(y)$, on a

$$L_1 = L\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_2 w}{\log w}\Big)\Big\}$$

d'où, par (2·9),

$$\varrho = \frac{k}{L}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_2 w}{\log w}\Big)\Big\} \qquad \big(y^{1-\varepsilon_0} \leqslant k \leqslant c_1\pi(y)\big). \tag{2·25}$$

Quand $y^{c_2} \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$, on a

$$L_2 = L\Big\{1 + O\Big(\frac{\log w}{\log y}\Big)\Big\}\cdot$$

D'après (2·11), cela implique, pour $y^{c_2} \leqslant k \leqslant \big(1 - c_3(\log_2 y)^2/\log y\big)\pi(y)$,

$$\varrho = \frac{k}{L}\Big\{1 + O\Big(\frac{w(\log w)^2 + w(\log_2 w)^2}{(w-1)(\log w)\log y}\Big)\Big\}\cdot \tag{2·26}$$

On en déduit également que, pour $c_4\pi(y) \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$,

$$\varrho = \frac{k}{L}\Big\{1 + O\Big((w-1) + \frac{1}{\log y}\Big)\Big\}, \tag{2·27}$$

d'après (2·22).

On utilise (2·24) pour $k \leqslant y^{1-\varepsilon_0}$, (2·25) quand $y^{1-\varepsilon_0} \leqslant k \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}\pi(y)$, (2·26) lorsque $\mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}\pi(y) \leqslant k \leqslant \big(1 - (\log_2 y)^{2/3}/(\log y)^{1/3}\big)\pi(y)$ et (2·27) pour les valeurs de k supérieures à $\big(1 - (\log_2 y)^{2/3}/(\log y)^{1/3}\big)\pi(y)$. On aboutit alors à une estimation du type $\varrho = (k/L)\{1 + \mathit{Erreur}\}$. Le terme *Erreur* est maximum lorsque $k \asymp 1$, auquel cas il est de l'ordre de $(\log_3 y)/\log_2 y$. Si $k \geqslant y^{1-\varepsilon}$, le terme *Erreur* est maximum lorsque $\mathit{Erreur} \asymp w - 1 \asymp (\log_2 y)^{2/3}/(\log y)^{1/3}$. Cela achève la démonstration de ce lemme. □

2.2. Lemmes fondamentaux de la méthode du col

Nos prochains résultats concernent la fonction $\varphi(z) = \log F(z,y)$ définie pour $z \in \mathbb{C} \smallsetminus]-\infty, -2]$ par la formule

$$\varphi(z) = \sum_{p \leqslant y} \log\Big(1 + \frac{z}{p}\Big), \tag{2·28}$$

où les logarithmes sont pris en détermination principale de sorte que $F(z,y) = \mathrm{e}^{\varphi(z)}$ pour ces mêmes valeurs de z.

Lemme 7. *Uniformément pour $y \geqslant 3$ et $1 \leqslant k \leqslant \pi(y)/2$, on a pour $\varrho = \varrho(k,y)$ et $|z-1| \leqslant (2+\varrho)/2\varrho$,*

$$\varphi(\varrho z) - \varphi(\varrho) = k(z-1) + O\Big((z-1)^2 \frac{\varrho}{1 + \log^+ \varrho}\Big). \tag{2·29}$$

Uniformément pour $\pi(y)/2 \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$, on a pour $|z-1| \leqslant (2+\varrho)/2\varrho$,

$$\varphi(\varrho z) - \varphi(\varrho) = \pi(y) \log z + \frac{1-z}{z}\big(\pi(y) - k\big) + O\big((z-1)^2(\pi(y)-k)(w-1)\big). \tag{2·30}$$

Démonstration. Notons d'abord que $\varphi(\varrho z)$ est bien définie dans le disque $|z-1| \leqslant (2+\varrho)/2\varrho$. Grâce à (2·28), on peut alors écrire

$$\varphi(\varrho z) - \varphi(\varrho) = \sum_{p \leqslant y} \log\Big(1 + \frac{\varrho}{p+\varrho}(z-1)\Big). \tag{2·31}$$

Pour démontrer (2·29), on développe les logarithmes à l'ordre deux,

$$\varphi(\varrho z) - \varphi(\varrho) = (z-1) \sum_{p \leqslant y} \frac{\varrho}{p+\varrho} + O\bigg(|z-1|^2 \sum_{p \leqslant y} \frac{\varrho^2}{(p+\varrho)^2}\bigg).$$

Par définition de ϱ, le terme principal de cette formule est égal à $k(z-1)$. D'autre part, on peut écrire

$$\sum_{p \leqslant y} \frac{\varrho^2}{(p+\varrho)^2} \ll \sum_{p \leqslant \varrho} 1 + \sum_{p > \varrho} \frac{\varrho^2}{p^2} \ll \frac{\varrho^2}{(1+\varrho)(1+\log^+ \varrho)} \leqslant \frac{\varrho}{1+\log^+ \varrho}.$$

On obtient donc bien l'estimation souhaitée.

Passons maintenant à la démonstration de (2·30). De (2·31), on tire

$$\begin{aligned}\varphi(\varrho z) - \varphi(\varrho) &= \pi(y) \log z + \sum_{p \leqslant y} \log\Big(1 - \frac{p}{p+\varrho}\,\frac{z-1}{z}\Big) \\ &= \pi(y) \log z + \frac{z-1}{z} \sum_{p \leqslant y} \frac{p}{p+y} + O\bigg((z-1)^2 \sum_{p \leqslant y} \frac{\varrho^2}{(p+\varrho)^2}\bigg).\end{aligned}$$

Par définition de ϱ, le deuxième terme de cette formule est égal à $(k - \pi(y))(z-1)/z$. Par ailleurs, pour la somme du terme d'erreur, on peut écrire, d'après (2·23),

$$\sum_{p \leqslant y} p^2/(p+\varrho)^2 \leqslant (1/\varrho^2) \sum_{p \leqslant y} p^2 \ll y^3/(\varrho^2 \log y) \asymp (\pi(y) - k)(w-1).$$

On en déduit alors l'estimation annoncée. $\square$

Pour notre résultat suivant, nous posons

$$\delta_h := i^{-h}\left[\frac{\mathrm{d}^h\big(\varphi(\varrho \mathrm{e}^{i\xi})\big)}{\mathrm{d}\xi^h}\right]_{\xi=0} \qquad (h \geqslant 1) \tag{2·32}$$

et nous remarquons que $\delta_1 = k$ d'après (1·7).

Considérons

$$R := L\{1 + \log^+(k/L)\} \tag{2·33}$$

où L est, rappelons-le, défini par

$$L := \frac{h(w)}{w \log w}\log\Big(\frac{\log y}{\log(y/w)}\Big)\cdot$$

Posons enfin

$$E := \begin{cases} \dfrac{1}{R} & \text{si} \quad 1 \leqslant k \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}\pi(y) \\ \dfrac{1}{\sqrt{\log y}} & \text{si} \quad \mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}\pi(y) \leqslant k \leqslant \big(1 - 1/\sqrt{\log y}\big)\pi(y), \\ w-1 & \text{si} \quad k \geqslant \big(1 - 1/\sqrt{\log y}\big)\pi(y). \end{cases} \tag{2·34}$$

Lemme 8. *Uniformément pour* $1 \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$, *on a*

$$\delta_2 = \Big(k - \frac{\varrho}{y+\varrho}\pi(y)\Big)\{1 + O(E)\}, \tag{2·35}$$

$$\delta_3 = \Big(k - \frac{\varrho}{\varrho+y}\pi(y) - \frac{\varrho y}{(y+\varrho)^2}\pi(y)\Big)\{1 + O(E)\}, \tag{2·36}$$

et

$$\delta_3 \asymp \delta_2 \asymp \min\{k\,;\, \pi(y) - k\}. \tag{2·37}$$

Sous les mêmes conditions, il existe une constante $\kappa > 0$ *telle que*

$$\sup_{|s| \leqslant \kappa}\left|\frac{\mathrm{d}^4\big(\varphi(\varrho\mathrm{e}^{i\xi})\big)}{\mathrm{d}\xi^4}(s)\right| = O_\kappa(\delta_2). \tag{2·38}$$

Démonstration. Commençons par les estimations de δ_2 et δ_3. Si $1 \leqslant k \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}\pi(y)$, l'utilisation de (2·29) et de la formule de Cauchy donne pour $h \geqslant 2$,

$$\delta_h = k + O\Big(\frac{\varrho}{1 + \log^+ \varrho}\Big)\cdot$$

Or (2·23) montre que le terme d'erreur est $\ll k/R$, d'où l'on tire

$$\delta_h = k\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{R}\Big)\Big\}\cdot \tag{2·39}$$

Par ailleurs, dans ce domaine de k, l'estimation (2·23) de ϱ permet d'obtenir les égalités

$$\frac{\varrho}{y+\varrho}\pi(y) = O\Big(\frac{k}{R}\Big),$$

$$\frac{\varrho}{\varrho+y}\pi(y) + \frac{\varrho y}{(y+\varrho)^2}\pi(y) = O\Big(\frac{k}{R}\Big)$$

qui, associées à (2·39) pour $h = 2$, 3 donnent (2·35) et (2·36) pour $1 \leqslant k \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}\pi(y)$. Si $\big(1 - 1/\sqrt{\log y}\big)\pi(y) \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$, on utilise, cette fois, l'égalité (2·30) et la formule de Cauchy de façon à obtenir, pour tout $h \geqslant 2$,

$$\delta_h = \big(\pi(y) - k\big)\{1 + O(w-1)\}. \tag{2·40}$$

Or, pour ces mêmes valeurs de k, (2·23) permet de voir que

$$k - \frac{\varrho}{y+\varrho}\pi(y) = \big(\pi(y) - k\big)\{1 + O(w-1)\}$$

$$k - \frac{\varrho}{\varrho+y}\pi(y) - \frac{\varrho y}{(y+\varrho)^2}\pi(y) = \big(\pi(y) - k\big)\{1 + O(w-1)\}$$

ce qui, associé à la formule (2·40) pour $h = 2$ et 3 nous fournit (2·35) et (2·36) pour $\big(1 - 1/\sqrt{\log y}\big)\pi(y) \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$. Il reste à considérer les valeurs intermédiaires de k comprises entre $\mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}\pi(y)$ et $\big(1 - 1/\sqrt{\log y}\big)\pi(y)$. Pour ces valeurs, on pose $T = T_y = (\log y)\mathrm{e}^{\sqrt{\log y}}$ et on écrit pour $h \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\int_2^y \frac{\varrho^h \mathrm{d}t}{(t+\varrho)^h \log t} &= \int_2^{y/T} \frac{\varrho^h \mathrm{d}t}{(t+\varrho)^h \log t} + \int_{y/T}^y \frac{\varrho^h \mathrm{d}t}{(t+\varrho)^h \log t} \\
&= O\big(\mathrm{li}(y/T)\big) + \Big\{1 + O\Big(\frac{\log T}{\log y}\Big)\Big\}\frac{1}{\log y}\Big[\frac{-\varrho^h}{(h-1)(t+\varrho)^{h-1}}\Big]_{t=y/T}^{t=y} \\
&= \alpha\pi(y) + O\Big(\alpha\frac{y}{\log^{3/2} y} + \frac{y}{T\log y}\Big)
\end{aligned}$$

où

$$\alpha = \frac{\varrho}{y}\frac{(y+\varrho)^{h-1} - \varrho^{h-1}}{(h-1)(y+\varrho)^{h-1}}.$$

Donc, d'après le théorème des nombres premiers et l'estimation (2·23) de ϱ, on peut conclure que

$$\begin{aligned}
\delta_2 &= k - \sum_{p\leqslant y}\frac{\varrho^2}{(p+\varrho)^2} \\
&= k - \frac{\varrho}{\varrho+y}\pi(y) + O\Big(\frac{\varrho}{\varrho+y}\frac{y}{\log^{3/2} y} + \frac{y}{T\log y}\Big) \\
&= \Big(k - \frac{\varrho}{\varrho+y}\pi(y)\Big)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log y}}\Big)\Big\}
\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
\delta_3 &= k - 3\sum_{p\leqslant y}\frac{\varrho^2}{(p+\varrho)^2} + 2\sum_{p\leqslant y}\frac{\varrho^3}{(p+\varrho)^3} \\
&= \Big(k - \frac{\varrho}{\varrho+y}\pi(y) - \frac{\varrho y}{(y+\varrho)^2}\pi(y)\Big)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log y}}\Big)\Big\}.
\end{aligned}$$

Reste alors à constater que les estimations (2·39) et (2·40) impliquent (2·37).

Passons maintenant à la majoration de la dérivée quatrième de $\xi \mapsto \varphi(\varrho e^{i\xi})$ dans un voisinage de l'origine. L'utilisation de (2·29) et de la formule de Cauchy permet d'affirmer l'existence d'une constante $\kappa_1 > 0$ telle que pour $|s| < \kappa_1$ et uniformément pour $1 \leqslant k \leqslant \pi(y)/2$, on a

$$\sup_{|s|\leqslant\kappa_1}\left|\frac{d^4\big(\varphi(\varrho e^{i\xi})\big)}{d\xi^4}(s)\right| = O_{\kappa_1}(k).$$

Or, pour ces mêmes valeurs de k, le résultat (2·35) montre que $\delta_2 \asymp k$, ce qui permet de conclure dans ce cas. Par ailleurs, l'utilisation de (2·30) et de la formule de Cauchy permet d'affirmer l'existence d'une constante $\kappa_2 > 0$ telle que pour $|s| < \kappa_2$ et uniformément pour $\pi(y)/2 \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$,

$$\sup_{|s|\leqslant\kappa_2}\left|\frac{d^4\big(\varphi(\varrho e^{i\xi})\big)}{d\xi^4}(s)\right| = O_{\kappa_2}\big(\pi(y) - k\big).$$

Or pour ces mêmes valeurs de k, (2·35) montre que $\delta_2 \asymp \pi(y) - k$, ce qui permet encore de conclure dans ce cas. On prend $\kappa = \min\{\kappa_1; \kappa_2\}$. □

Lemme 9. *Uniformément pour* $1 \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$, *on a*

$$|F(\varrho e^{i\vartheta}, y)| \leqslant F(\varrho, y)\exp\big\{-8\vartheta^2\delta_2/\pi^2\big\} \qquad (|\vartheta| \leqslant \pi). \tag{2·41}$$

Démonstration. Pour tout nombre premier p, on a

$$\Big|1 + \frac{\varrho e^{i\vartheta}}{p}\Big|^2 = \Big(1 + \frac{\varrho}{p}\Big)^2\bigg(1 - \frac{2\varrho(1-\cos\vartheta)}{p(1+\varrho/p)^2}\bigg).$$

En effectuant le produit de ces égalités pour $p \leqslant y$, on obtient

$$\frac{|F(\varrho e^{i\vartheta}, y)|}{F(\varrho, y)} \leqslant \exp\bigg\{-4(1-\cos\vartheta)\sum_{p\leqslant y}\frac{\varrho p}{(\varrho+p)^2}\bigg\} \leqslant \exp\Big\{-\frac{8}{\pi^2}\vartheta^2\delta_2\Big\}$$

d'après (2·32). □

2.3. Démonstration du Théorème 1

On distingue deux cas selon que ϱ est « grand » ou « petit ». Lorsque $\varrho \leqslant 1/3$, alors $|w| = 1$ implique $|w - 1| \leqslant (1+\varrho)/2\varrho$ et la relation (2·29) est applicable pour évaluer l'intégrande de (1·6) en tous points du cercle $|z| = \varrho|w| = \varrho$. On peut donc écrire

$$\sigma_k^*(y) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|w|=1} F(\varrho, y)e^{k(w-1)}\Big\{1 + O\Big(\frac{k|w-1|^2}{\log_2 y}\Big)\Big\}\varrho^{-k}w^{-k-1}dw.$$

On a en effet $\varrho/(1 + \log^+\varrho) = \varrho \asymp k/\log_2 y \ll 1$, de sorte que la formule précédente découle immédiatement de (2·29). En explicitant le terme principal, il vient

$$\sigma_k^*(y) = F(\varrho, y)e^{-k}\varrho^{-k}\bigg\{\frac{k^k}{k!} + O\bigg(\frac{k}{\log_2 y}\int_{-\pi}^{\pi} e^{k\cos\vartheta}(1-\cos\vartheta)d\vartheta\bigg)\bigg\}.$$

La dernière intégrale est classiquement

$$\ll \mathrm{e}^k \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-2k\vartheta^2/\pi^2}\vartheta^2 \mathrm{d}\vartheta \ll \mathrm{e}^k k^{-3/2} \ll \frac{k^k}{k!}\frac{1}{k} = \frac{\mathrm{e}^k}{k^{3/2}W(k)}\cdot$$

D'où

$$\sigma_k^*(y) = \frac{\varrho^{-k}F(\varrho,y)}{W(k)\sqrt{k}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log_2 y}\Big)\Big\}\cdot$$

La formule (2·35) permet de voir que $\sqrt{\delta_2} = \sqrt{k}\{1+O(1/\log_2 y)\}$ donc nous avons établi (1·9) pour $\varrho \leqslant 1/3$.

Dans la suite, on suppose donc que $\varrho > 1/3$. On évalue alors l'intégrale de Cauchy (1·6) en développant la fonction $\varphi(\varrho\mathrm{e}^{i\vartheta})$ en série de Taylor. On sait, d'après (2·38), qu'il existe une constante absolue c telle que pour $|\vartheta| \leqslant c$, on ait (puisque $\delta_1 = k$)

$$\varphi(\varrho\mathrm{e}^{i\vartheta}) = \varphi(\varrho) + ik\vartheta - \delta_2\vartheta^2/2 - i\delta_3\vartheta^3/6 + O(\delta_2\vartheta^4).$$

Par conséquent, on a, pour $|\vartheta| \leqslant c\delta_3^{-1/3}$,

$$F(\varrho\mathrm{e}^{i\vartheta},y)\mathrm{e}^{-ik\vartheta} = F(\varrho,y)\mathrm{e}^{-\delta_2\vartheta^2/2}\{1 - i\delta_3\vartheta^3/6 + O(\delta_2\vartheta^4 + \delta_3^2\vartheta^6)\}. \tag{2·42}$$

Désignons par J_1 et J_2 les contributions respectives des domaines $|\vartheta| \leqslant c\delta_3^{-1/3}$ et $c\delta_3^{-1/3} < |\vartheta| \leqslant \pi$ à l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(\varrho\mathrm{e}^{i\vartheta},y)}{F(\varrho,y)}\mathrm{e}^{-ik\vartheta}\mathrm{d}\vartheta,$$

de sorte que l'on ait, d'après la formule (1·6),

$$\sigma_k^*(y) = \frac{F(\varrho,y)}{2\pi\varrho^k}(J_1+J_2). \tag{2·43}$$

Il découle de (2·42) que

$$J_1 = \int_{|\vartheta|\leqslant c\delta_3^{-1/3}} \mathrm{e}^{-\delta_2\vartheta^2/2}\{1+O(\delta_2\vartheta^4+\delta_3^2\vartheta^6)\}\mathrm{d}\vartheta,$$

car la contribution du terme en ϑ^3 est nulle par symétrie. En effectuant le changement de variable $t = \vartheta\sqrt{\delta_2}$, on vérifie sans peine que la formule précédente devient

$$J_1 = \sqrt{2\pi/\delta_2}\{1+O(1/\delta_2)\}$$

car $(\delta_2)^3(\delta_3)^{-2} \asymp \delta_2$ d'après (2·37).

Par ailleurs, (2·41) permet de majorer largement J_2. On a

$$J_2 \ll (\delta_2)^{-1/2}\exp\big\{-8c^2(\delta_2)^{1/3}/\pi^2\big\} \ll (\delta_2)^{-3/2}.$$

En reportant ces estimations dans (2·43), on obtient alors

$$\sigma_k^*(y) = \frac{F(\varrho,y)}{\varrho^k\sqrt{2\pi\delta_2}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\delta_2}\Big)\Big\}\cdot$$

On remarque, d'après (2·35), que $\delta_2 \ll k$ et donc que

$$W(k) = \sqrt{2\pi}\,\{1 + O(1/k)\} = \sqrt{2\pi}\,\{1 + O(1/\delta_2)\}\,,$$

ce qui, reporté dans l'estimation précédente, donne

$$\sigma_k^*(y) = \frac{\varrho^{-k}F(\varrho,y)}{W(k)\sqrt{\delta_2}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\delta_2}\Big)\Big\}\cdot$$

Associée à (2·37), cette formule implique (1·9) lorsque $k \gg \log_2 y$. Cela achève la démonstration du Théorème 1.

2.4. Démonstration du Corollaire 1

Pour démontrer le premier corollaire, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 10. *Uniformément pour $1 \leqslant k \leqslant \pi(y) - 1$, on a*

$$\varphi(\varrho) = \log\Big(1 + \frac{\varrho}{y}\Big)\pi(y) + k + O\Big(\frac{k}{\log y}\Big)\cdot \tag{2·44}$$

Démonstration. D'après (2·28), on a

$$\begin{aligned}
\varphi(\varrho) = &\int_{2-}^{y} \log\Big(1 + \frac{\varrho}{t}\Big)\mathrm{d}\pi(y) \\
= &\ \log\Big(1 + \frac{\varrho}{y}\Big)\pi(y) + \int_{2-}^{y} \frac{\varrho}{t+\varrho}\,\frac{\pi(t)}{t}\mathrm{d}t \\
= &\ \log\Big(1 + \frac{\varrho}{y}\Big)\pi(y) + \int_{2-}^{y} \frac{\varrho}{t+\varrho}\,\frac{\mathrm{d}t}{\log t} + O\Big(\int_{2-}^{y} \frac{\varrho}{t+\varrho}\,\frac{\mathrm{d}t}{(\log t)^2}\Big) \\
= &\ \log\Big(1 + \frac{\varrho}{y}\Big)\pi(y) + k + O\Big(\frac{k}{\log y}\Big)
\end{aligned}$$

et le résultat est démontré. □

La formule (2·44) implique que

$$F(\varrho,y) = \exp\varphi(\varrho) = \mathrm{e}^k(1 + \varrho/y)^{\pi(y)}\exp\{O(k/\log y)\}\,.$$

Par ailleurs, il découle de (2·23) que

$$(1 + \varrho/y)^{\pi(y)} = \{1 + k/(Ly)\}^{kw}\exp\Big\{O\Big(k\frac{\log_3 y}{\log_2 y}\Big)\Big\}$$

et

$$\varrho^k = (k/L)^k\exp\Big\{O\Big(k\frac{\log_3 y}{\log_2 y}\Big)\Big\}\cdot$$

Enfin, (2·35) implique en particulier

$$\sqrt{\delta_2/k} = \exp\Big\{O\Big(k\frac{\log_3 y}{\log_2 y}\Big)\Big\}\cdot$$

L'estimation (1·18) est alors une conséquence simple de (1·9), des trois résultats précédents et de la définition (1·8) de $W(k)$.

2.5. Démonstration du Corollaire 2

Lorsque y est fixé, nous pouvons considérer $\varrho = \varrho(k,y)$ comme une fonction de k et étendre son domaine de définition à tout l'intervalle $[k, k+1]$ de sorte que ϱ soit dérivable et vérifie toujours (1·7). On pose alors $\varrho_0 = \varrho(k,y)$, $\varrho_1 = \varrho(k+1,y)$ et

$$K(m) = \log F\big(\varrho(m,y),y\big) - m\log\varrho(m,y),$$

de telle façon que, d'après (1·9),

$$\frac{\sigma^*_{k+1}(y)}{\sigma^*_k(y)} = \exp\Big\{\int_k^{k+1} K'(m)\mathrm{d}m\Big\}\sqrt{\frac{\delta_2(k,y)}{\delta_2(k+1,y)}}\{1+O(\varepsilon_{k,y})\}, \tag{2·45}$$

où l'on a posé

$$\varepsilon_{k,y} := \frac{1}{\min\{k+\log_2 y\,;\,\pi(y)-k\}}\cdot$$

Or

$$K'(m) = \varrho'(m,y)\bigg\{\frac{F'\big(\varrho(m,y),y\big)}{F\big(\varrho(m,y),y\big)} - \frac{m}{\varrho(m,y)}\bigg\} - \log\varrho(m,y) = -\log\varrho(m,y)$$

d'après (1·7). De plus, d'après (2·23), on a, pour $m \in [k,k+1]$,

$$\varrho(m,y) = \varrho(k,y)\Big\{1+O\Big(\frac{\log_3 y}{\log_2 y}\Big)\Big\}$$

donc

$$K'(m) = -\log\varrho_0 + O\Big(\frac{\log_3 y}{\log_2 y}\Big)\cdot$$

On en déduit que

$$\exp\Big\{\int_k^{k+1} K'(m)\mathrm{d}m\Big\} = \frac{1}{\varrho_0}\Big\{1+O\Big(\frac{\log_3 y}{\log_2 y}\Big)\Big\}\cdot \tag{2·46}$$

D'un autre côté, (2·23) et (2·35) permettent de voir que

$$\frac{\delta_2(k,y)}{\delta_2(k+1,y)} = \Big\{1+O\Big(\frac{\log_3 y}{\log_2 y}\Big)\Big\}\cdot \tag{2·47}$$

On conclut alors sans difficulté en introduisant (2·23), (2·46) et (2·47) dans (2·45). □

2.6. Démonstration du Corollaire 3

Par symétrie, nous supposons pleinement que $\eta > 0$. Lorsque le nombre entier k est fixé, nous définissons la fonction $y \mapsto \varrho(y) = \varrho(k,y)$ comme l'unique solution de l'équation

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{\varrho}{p+\varrho} = k$$

et nous posons

$$\begin{aligned} N(y) &= \log\big\{F\big(\varrho(y),y\big) - k\log\varrho(y)\big\} \\ &= \int_1^y \log\Big(1+\frac{\varrho(y)}{t}\Big)\mathrm{d}\pi(t) - k\log\varrho(y). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que

$$\mathrm{d}N(y) = \log\Big(1 + \frac{\varrho(y)}{y}\Big)\mathrm{d}\pi(y)$$

de sorte que l'on peut écrire, d'après (1·9),

$$\frac{\sigma_k^*(y^\eta)}{\sigma_k^*(y)} = \sqrt{\frac{\delta_2(y^{1+\eta})}{\delta_2(y)}}\exp\Big\{\sum_{y<p\leqslant y^{1+\eta}}\log\Big(1+\frac{\varrho(p)}{p}\Big) + O(\varepsilon_{k,y})\Big\}, \tag{2·48}$$

où l'on a posé

$$\varepsilon_{k,y} := \frac{1}{\min\{k + \log_2 y\,;\, \pi(y) - k\}}.$$

Lorsque $y \leqslant p < y^{1+\eta} \leqslant y^{1+\eta_0}$ avec

$$\eta_0 := \frac{L\log w}{\log y}\frac{\log_3 y}{\log_2 y},$$

on a, d'après le Lemme 6,

$$\varrho(p) = \frac{k}{L}\Big\{1 + \Big(\frac{\log_3 y}{\log_2 y}\Big)\Big\}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\sum_{y<p\leqslant y^{1+\eta}}\log\Big(1+\frac{\varrho(p)}{p}\Big) &= \sum_{y<p\leqslant y^{1+\eta}}\Big\{\frac{k}{Lp} + O\Big(\frac{k\log_3 y}{pL\log_2 y} + \frac{k^2}{L^2p^2}\Big)\Big\}\\ &= \frac{k}{L}\Big\{\log(1+\eta) + O\big(\mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}\big)\Big\}\\ &\qquad + O\Big(\frac{k\log_3 y}{L\log_2 y}\big(\eta + \mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}\big) + \frac{k^2}{L^2 y\log y}\Big)\\ &= \frac{k}{L}\log(1+\eta) + O\Big(\frac{k}{L}\mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}} + \eta\frac{k\log_3 y}{L\log_2 y}\Big).\end{aligned}$$

Par ailleurs, il découle en particulier des Lemmes 6 et 8 que

$$\frac{\delta_2(y^{1+\eta})}{\delta_2(y)} = \exp\Big\{\eta\frac{k\log_3 y}{L\log_2 y}\Big\}.$$

En associant les deux précédentes estimations et (2·48), on obtient bien (1·22). □

Bibliographie

[8] Erdős P., Tenenbaum G., Sur les densités de certaines suites d'entiers, *Proc. London Math. Soc.* (3) **59** (1989), 417—438.

[9] de Koninck J.-M., Tenenbaum G., Sur la loi de répartition du k-ième facteur premier d'un entier, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (2) **133** (2002), 191—204.

[10] Tenenbaum G., *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, seconde éd., Cours spécialisés numéro 1, Soc. Math. France (1995).

Répartition des entiers dont le nombre des facteurs premiers est fixé

Sébastien Kerner

Sommaire

3. Introduction

Soient $x \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Désignons par $\pi_k(x)$ le nombre d'entiers naturels n'excédant pas x et possédant exactement k facteurs premiers distincts. Nous consacrons ce travail à l'estimation de $\pi_k(x)$.

Désignons par $\{p_j\}_{j\geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers ; par $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de l'entier n (avec la convention $\omega(1) = 0$) et définissons

$$K = K_x := \max_{n\leqslant x} \omega(n). \tag{3·1}$$

K_x est donc l'unique nombre entier tel que $p_1p_2\dots p_K \leqslant x < p_1p_2\dots p_Kp_{K+1}$. Le théorème des nombres premiers permet d'estimer K_x.(1) On a, pour tout entier $m \geqslant 1$,(2)

$$K_x = \begin{cases} \mathrm{li}\,(\log x)\big\{1 + O_\varepsilon\big(\mathrm{e}^{-(\log_2 x)^{3/5-\varepsilon}}\big)\big\} \\ \dfrac{\log x}{\log_2 x}\Big\{1 + \dfrac{1}{\log_2 x} + \cdots + \dfrac{m!}{(\log_2 x)^m} + O_m\Big(\dfrac{1}{(\log_2 x)^{m+1}}\Big)\Big\}. \end{cases} \tag{3·2}$$

Il est clair qu'un nombre entier $n \leqslant x$ ne possède pas plus de K_x facteurs premiers distincts (sinon n serait supérieur à $p_1p_2\dots p_Kp_{K+1}$) et que, réciproquement, il existe au moins un nombre $n \leqslant x$ qui en possède K_x (par exemple le nombre $p_1p_2\dots p_K$). Nous obtenons donc que $\pi_k(x) = 0$ si, et seulement si, $k > K_x$. Le comportement de $\pi_k(x)$ reste à élucider pour x assez grand et $1 \leqslant k \leqslant K_x$.

3.1. L'historique du problème

L'histoire de la fonction $\pi_k(x)$ a aujourd'hui un peu plus d'un siècle. Lorsque k est fixé, Landau [20] a démontré en 1900 que $\pi_k(x)/x$ suit asymptotiquement une loi de Poisson de paramètre $\log_2 x$, autrement dit que

$$\pi_k(x) \sim \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{x}{\log x} \qquad (x \to +\infty).$$

Depuis, de nombreux chercheurs ont précisé le comportement asymptotique de $\pi_k(x)$ pour des valeurs de k appartenant à d'autres sous-domaines de l'intervalle $[1, K_x]$.

Le premier résultat de ce type date de 1948. Dans son étude [15] des entiers composés de k facteurs premiers, Erdős a démontré que l'estimation de Landau persiste lorsque $k = \log_2 x + O\big(\sqrt{\log_2 x}\big)$.

Cinq ans plus tard, Sathe [22] et Selberg [23] ont unifié et précisé les résultats de Landau et Erdős en démontrant que la formule

$$\pi_k(x) = F\Big(\frac{k}{\log_2 x}\Big)\frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{x}{\log x}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log_2 x}\Big)\Big\},$$

avec

$$F(y) = \frac{1}{\Gamma(y+1)}\prod_p \Big(1 + \frac{y}{p-1}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^y, \tag{3·3}$$

est valide uniformément lorsque $x \geqslant 3$ et $1 \leqslant k \ll \log_2 x$.

1. Ces estimations sont établies dans [13].
2. Ici, et dans toute la suite, $\log_\ell$ désigne la ℓ-ième itérée de la fonction logarithme.

Leur résultat est resté le meilleur de ce genre jusqu'en 1987 où Hensley [18] a établi que l'on a, uniformément sur le domaine $x > x_0$ et $k \ll (\log_2 x)^2/\big((\log_3 x)^{3/2} \log_4 x\big)$,

$$\pi_k(x) = F\Big(\frac{k}{\log_2 x}\Big)\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}\exp\Big\{-\frac{1}{2}k\Big(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\Big)^2\Big\}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log_3 x}}\Big)\Big\}. \tag{3·4}$$

Parallèlement à cette recherche d'équivalent asymptotique, plusieurs auteurs ont donné des majorations et des minorations de $\pi_k(x)$. Un raisonnement par récurrence permet ainsi de démontrer l'inégalité de Hardy–Ramanujan [17] (1917) :

$$\pi_k(x) \leqslant c_1\frac{(\log_2 x + c_2)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{x}{\log x} \qquad (x \geqslant 3,\ k \geqslant 1),$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes absolues.

Plus récemment, Pomerance [21] a établi un encadrement de $\pi_k(x)$ sur le domaine $x \geqslant x_0$ et $(\log_2 x)^{1+\varepsilon} \leqslant k \leqslant (\log x)/(3\log_2 x)$, donné par

$$\pi_k(x) = \frac{x}{k!\log x}\exp\Big\{k\Big(\log L_0 + \frac{\log L_0}{L_0} + O_\varepsilon\Big(\frac{1}{L_0}\Big)\Big)\Big\}, \tag{3·5}$$

où

$$L_0 := \log\Big(\frac{\log x}{k\log(k+1)}\Big). \tag{3·6}$$

Il est également possible d'établir une majoration de $\pi_k(x)$ à l'aide de la méthode de Rankin. Considérons la série de Dirichlet F, des variables complexes z et s, donnée par

$$F(z,s) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \prod_p\Big(1+\frac{z}{p^s-1}\Big) \tag{3·7}$$

et définie *a priori* dans le demi-plan $\mathcal{R}\mathrm{e}(s) > 1$. Pour tous nombres réels $r > 0$ et $\sigma > 1$, on a

$$\pi_k(x) = \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \omega(n)=k}} 1 \leqslant \sum_{n\geqslant 1} r^{\omega(n)-k}\Big(\frac{x}{n}\Big)^\sigma = r^{-k}x^\sigma F(r,\sigma)$$

et donc

$$\pi_k(x) \leqslant \inf_{r>0,\sigma>1}\{r^{-k}x^\sigma F(r,\sigma)\}.$$

Nous verrons au cours de la démonstration de la Proposition 3 que la fonction $(r,\sigma) \mapsto r^{-k}x^\sigma F(r,\sigma)$ est une fonction log-convexe dont la borne inférieure est atteinte en un point $(r,\sigma) = (\alpha,\varrho)$ solution du système

$$\begin{cases} \Big[\dfrac{\partial}{\partial r}\log F(r,\sigma)\Big]_{\substack{r=\varrho\\ \sigma=\alpha}} = \displaystyle\sum_p \frac{1}{p^\alpha - 1 + \varrho} = \frac{k}{\varrho}, \\ \Big[-\dfrac{\partial}{\partial \sigma}\log F(r,\sigma)\Big]_{\substack{r=\varrho\\ \sigma=\alpha}} = \displaystyle\sum_p \frac{\varrho\log p}{(1-p^{-\alpha})(p^\alpha-1+\varrho)} = \log x. \end{cases} \tag{3·8}$$

Lorsque $x \geqslant 3$ et $1 \leqslant k < K_x$, nous montrerons, dans la Proposition 3, que ce système admet une solution unique $(\alpha,\varrho) = \big(\alpha(k,x),\varrho(k,x)\big)$.(3) On a donc

$$\pi_k(x) \leqslant \varrho^{-k}x^\alpha F(\varrho,\alpha).$$

3. Précisons que dans le cas particulier où $k = K_x = K$, le système (3·8) admet une solution (ϱ,α) si, et seulement si, $x \neq p_1p_2\dots p_K$ (en particulier si x n'est pas un entier). Si $k = K_x$ et $x = p_1p_2\dots p_K$, on a $\pi_K(x) = 1$.

En 1988, Hildebrand et Tenenbaum [19] ont réalisé un progrès remarquable dans l'estimation de $\pi_k(x)$. À l'aide de la méthode du col en deux variables, ils ont démontré que l'on a, uniformément pour x assez grand, $1 \leqslant k \ll (\log x)/(\log_2 x)^2$, $\alpha = \alpha(k,x)$ et $\varrho = \varrho(k,x)$,

$$\pi_k(x) = \frac{\varrho^{-k} x^\alpha F(\varrho,\alpha)}{W(k)W(\varrho)\sqrt{k/\varrho}\log x}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{L_0}\Big)\Big\}, \tag{3·9}$$

où L_0 a été définie par (3·6) et

$$W(t) := \Gamma(t)t^{-t+1/2}\,\mathrm{e}^t.$$

Malgré sa nature *a priori* moins explicite que la formule de Sathe–Selberg, ce résultat possède de nombreux avantages.

D'une part, le saut quantitatif entre le domaine de validité de (3·4) et celui de (3·9) révèle la pertinence de cette méthode pour évaluer $\pi_k(x)$. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre suivant.

D'autre part, l'estimation (3·9) peut fournir des améliorations de l'évaluation de Hensley (3·4) et de l'encadrement de Pomerance (3·5). Pour cela, on introduit dans (3·9) des évaluations convenables de ϱ et α afin d'obtenir des estimations explicites de $\pi_k(x)$. Ainsi, γ désignant la constante d'Euler, on a, uniformément pour x assez grand et $1 \leqslant k \ll (\log_2 x)^2$,

$$\pi_k(x) = F(y_0)\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{e}^{-kh/2}\Big\{1 + O\Big(\frac{1+y_0}{\log_2 x}\Big)\Big\}$$

avec

$$h := \Big(\frac{\log(2+\,\mathrm{e}^\gamma y_0 \log y_0)}{\log_2 x}\Big)^2 \qquad \text{et} \qquad y_0 := \frac{k}{\log_2 x}\cdot$$

Ce résultat améliore (3·4) tant pour la précision que pour le domaine de validité. La même technique permet de donner une estimation de $\pi_k(x)$ qui précise (3·5) lorsque $k \gg (\log_2 x)^2$. Cependant, dans ce dernier cas, la formule obtenue ne fournit pas un équivalent de $\pi_k(x)$ mais seulement les premiers termes d'un développement asymptotique de $\log \pi_k(x)$. Avec la notation (3·6), on a, uniformément pour x assez grand et $(\log_2 x)^2 \ll k \ll (\log x)/(\log_2 x)^2$,

$$\pi_k(x) = \frac{x}{k!\log x}\exp\Big\{k\Big(\log M_0 + \frac{1}{M_0} + O(R_0)\Big)\Big\}, \tag{3·10}$$

où

$$M_0 := \log\Big(\frac{\log x}{k\log(2+k/L_0)}\Big) + \log_2\Big(\frac{L_0\log x}{k\log(2+k/L_0)}\Big) - \gamma$$

et

$$R_0 := \frac{1}{L_0}\Big(\frac{1}{\log(2+k/L_0)} + \frac{1}{L_0}\Big)\cdot$$

L'un des autres intérêts du résultat de Hildebrand et Tenenbaum est qu'il permet d'obtenir des formules dites *semi-asymptotiques* pour $\pi_k(x)$, c'est-à-dire des estimations du comportement des rapports $\pi_{k'}(x)/\pi_k(x)$ et $\pi_k(x')/\pi_k(x)$ lorsque k' et x' sont « proches » de k et x. On retrouve là l'un des attraits les plus significatifs de la méthode du col : celui de fournir naturellement le comportement explicite du quotient de deux quantités dont les équivalents asymptotiques ne sont connus qu'au travers de grandeurs définies implicitement (comme c'est le cas ici pour ϱ et α). Ainsi, pour les petites variations en k, il découle de l'évaluation de Hildebrand et Tenenbaum que, pour x assez grand et $1 \leqslant k \ll (\log x)/(\log_2 x)^2$, on a

$$\frac{\pi_{k+1}(x)}{\pi_k(x)} = \frac{L_0}{k}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log L_0}{L_0}\Big)\Big\}. \tag{3·11}$$

Pour les petites variations en x, on a, uniformément pour x assez grand, $1 \leqslant \lambda \leqslant x$ et $1 \leqslant k \ll (\log x)/(\log_2 x)^2$,

$$\frac{\pi_k(\lambda x)}{\lambda \pi_k(x)} = \Big(\frac{\log(\lambda x)}{\log x}\Big)^{k/L_0 - 1} \exp\Big\{O\Big(\frac{1}{L_0} + \frac{k(\log L_0)\log\lambda}{L_0^2 \log x}\Big)\Big\}. \tag{3·12}$$

Ces estimations semi-asymptotiques sont liées à un problème connu d'Erdős. Dans [15], il a émis la conjecture que pour x assez grand, la suite $k \mapsto \pi_k(x)$ est unimodale, c'est-à-dire qu'il existe un nombre entier $k_0 = k_0(x)$ tel que

$$\pi_1(x) \leqslant \pi_2(x) \leqslant \cdots \leqslant \pi_{k_0}(x) \geqslant \pi_{k_0+1}(x) \geqslant \cdots .$$

En 1989, Balazard [13] a démontré cette conjecture.(4)

Pour les valeurs de k d'ordre inférieur à $(\log x)/(\log_2 x)^2$, l'estimation semi-asymptotique (3·11) fournit, pour une certaine constante $c_3 > 0$, une forme effective de la stricte croissance de $k \mapsto \pi_k(x)$ pour $1 \leqslant k \leqslant \log_2 x - c_3$ et de la stricte décroissance de $\pi_k(x)$ pour $\log_2 x - c_3 \leqslant k \ll (\log x)/(\log_2 x)^2$. Dans l'intervalle $|k - \log_2 x| \leqslant c_3$, Balazard s'appuie sur une amélioration de la formule de Sathe–Selberg pour lever l'incertitude sur le signe de $\pi_{k+1}(x) - \pi_k(x)$. Il montre ainsi que le maximum de $\pi_k(x)$ est atteint pour $k = k_0 = \log_2 x + F'(1) + \Delta(x)$ (où F est définie par (3·3)) avec $\liminf_{x\to\infty}\Delta(x) = 0$ et $\limsup_{x\to\infty}\Delta(x) = 1$ (cf. [13] et [14] pour plus de détails). Si $k \ll (\log x)/(\log_2 x)^2$, on connaît donc précisément le comportement asymptotique du rapport $\pi_{k+1}(x)/\pi_k(x)$.

Le raisonnement de Balazard permet de démontrer la décroissance de la suite $k \mapsto \pi_k(x)$ pour $k \geqslant k_0(x)$, indépendamment du résultat obtenu par Hildebrand et Tenenbaum. Il complète donc la preuve de la conjecture d'Erdős pour les valeurs de k d'ordre supérieur à $(\log x)/(\log_2 x)^2$. Son idée essentielle consiste à considérer $\pi_k(x)$ comme la valeur en $y = 2 - \varepsilon$ du nombre $\pi_k(x, y)$ d'entiers plus petits que x ayant k facteurs premiers distincts tous strictement supérieurs à y. L'intérêt de cette dernière fonction est qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$\pi_{k+1}(x, y) = \sum_{\substack{p>y \\ \nu\geqslant 1}} \pi_k\Big(\frac{x}{p^\nu}, p\Big)$$

qui se prête à un raisonnement par récurrence. Au cours de ce raisonnement, Balazard utilise de manière cruciale les résultats d'Alladi [11] sur la fonction $\pi_k(x, y)$.

4. Dans le même travail, Balazard démontre aussi l'unimodalité des suites $k \mapsto \sum_{n\leqslant x,\, \omega(n)=k} \mu(n)^2$ et $k \mapsto \sum_{n\leqslant x,\, \Omega(n)=k} 1$ où μ désigne la fonction de Möbius et $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers, comptés avec multiplicité, de l'entier n (avec la convention $\Omega(1) = 0$).

L'objet de ce travail est de donner une évaluation asymptotique de $\pi_k(x)$ valable uniformément pour $x > x_0(\varepsilon)$ et

$$(3{\cdot}13) \qquad 1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon} \qquad \text{avec} \qquad K_{x,\varepsilon} := \Big(1 + \frac{1-\varepsilon}{\log_2 x}\Big)\frac{\log x}{\log_2 x},$$

où $\varepsilon > 0$ est un nombre réel quelconque fixé.

Nous donnons ainsi une évaluation de $\pi_k(x)$, pour x assez grand, sur un large domaine de valeurs de k (quasi optimal d'après l'estimation (3·2) de K_x). En particulier, la proportion $K_{x,\varepsilon}/K_x$ de l'intervalle $[1, K_x]$ traitée par notre domaine tend vers l'unité alors qu'elle tendait vers zéro avec le résultat de Hildebrand et Tenenbaum.

D'autre part, nous obtenons une forme effective de la décroissance (en k) de la suite $\pi_k(x)$ pour les grandes valeurs de k. Cela permet de retrouver et de préciser l'unimodalité de $\pi_k(x)$ pour $k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, par une méthode différente de celle de Balazard. En choisissant $\varepsilon < \log 2$ et en utilisant un résultat de Balazard[(5)] pour $k \geqslant K_{x,\varepsilon}$, on obtient ainsi une nouvelle démonstration de l'unimodalité de la suite $k \mapsto \pi_k(x)$ par une méthode indépendante du raisonnement par récurrence mis en place par Balazard dans [13].

Le domaine (3·13) correspond aux valeurs de k pour lesquelles la seconde coordonnée $\alpha = \alpha(k, x)$ du col reste bornée. Il est toutefois possible, au prix de plusieurs complications techniques, d'adapter la méthode que nous présentons ci-après pour obtenir une évaluation de $\pi_k(x)$ sur le domaine

$$1 \leqslant k \leqslant K'_{x,\varepsilon} \qquad \text{avec} \qquad K'_{x,\varepsilon} := \big\{1 - \mathrm{e}^{-(\log_2 x)^{1/2-\varepsilon}}\big\}K_x.$$

Sous l'hypothèse de Riemann, il est même possible d'agrandir ce domaine à

$$1 \leqslant k \leqslant K''_{x,\varepsilon} \qquad \text{avec} \qquad K''_{x,\varepsilon} := \big\{1 - (\log x)^{-1/2+\varepsilon}\big\}K_x.$$

3.2. Résultats obtenus par la méthode du col

3.2.1. Description de la méthode du col

La méthode employée dans ce travail est celle de Hildebrand et Tenenbaum dans [19] : la méthode du col en deux variables.

Comme $\pi_k(x)$ apparaît comme le coefficient de z^k dans le polynôme $\sum_{n\leqslant x} z^{\omega(n)}$, les formules de Taylor et Perron permettent d'écrire, pour $r > 0$, $\sigma > 1$ et $x \notin \mathbb{N}$,

$$(3{\cdot}14) \qquad \pi_k(x) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=r}\sum_{n\leqslant x} z^{\omega(n)}\frac{\mathrm{d}z}{z^{k+1}} = -\frac{1}{4\pi^2}\oint_{|z|=r}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{z^{-k}x^sF(z,s)}{zs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z$$

où F a été définie par (3·7), c'est-à-dire

$$F(z,s) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^{\omega(n)}}{n^s} = \prod_p\Big(1 + \frac{z}{p^s-1}\Big).$$

5. Ce résultat énonce que pour les très grandes valeurs de k, c'est-à-dire pour $x > x_0(c_4)$ et $k \geqslant \{1 - c_4/\log_2 x\}K_x$ avec $0 < c_4 < \log 2$, l'inégalité $\pi_{k+1}(x) \leqslant \pi_k(x)$ découle de l'existence d'une injection de l'ensemble $\{n \leqslant x : \omega(n) = k\}$ vers l'ensemble $\{n \leqslant x : \omega(n) = k-1\}$. Il est démontré dans [13] dans le cas des entiers sans facteurs carrés. Nous donnons dans le chapitre 6 la preuve de Balazard dans le cas général.

Le principe de la méthode du col consiste alors à choisir pour le couple de paramètres $(r,\sigma)\in\,]0,+\infty[\,\times\,]1,+\infty[$ le point-selle de la fonction $z^{-k}x^sF(z,s)$, c'est-à-dire le point (ϱ,α) dont les coordonnées satisfont le système (3·8) défini, rappelons-le, par

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_p \frac{1}{p^\alpha-1+\varrho}=\frac{k}{\varrho}, \\ \displaystyle\sum_p \frac{\varrho\log p}{(1-p^{-\alpha})(p^\alpha-1+\varrho)}=\log x. \end{cases}$$

La contribution principale à la double intégrale (3·14) est alors donnée par un petit voisinage autour du point-selle (ϱ,α), dans lequel la formule de Taylor fournit l'ordre de grandeur de la fonction intégrée.

3.2.2. Estimation de $\pi_k(x)$ par la méthode du col

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal. Rappelons que

$$K_{x,\varepsilon}:=\Big(1+\frac{1-\varepsilon}{\log_2 x}\Big)\frac{\log x}{\log_2 x}\qquad\text{et}\qquad W(t):=\Gamma(t)t^{-t+1/2}\,\mathrm{e}^t$$

de sorte qu'en vertu de la formule de Stirling, on a $W(t)=\sqrt{2\pi}\{1+O(1/t)\}$ $(t\to\infty)$.

Théorème 2. *Soit $\varepsilon>0$. Pour x assez grand, $1\leqslant k\leqslant K_{x,\varepsilon}$, $\alpha=\alpha(k,x)$ et $\varrho=\varrho(k,x)$, on a*

$$\pi_k(x)=\frac{\varrho^{-k}x^\alpha F(\varrho,\alpha)}{W(k)W(\varrho)\alpha\sqrt{\delta}}\Big\{1+O_\varepsilon\Big(\frac{(\log_2 x)^5}{\sqrt{k}+(\log_2 x)^6}\Big)\Big\},\tag{3·15}$$

où δ désigne le hessien de l'application $g:(\vartheta,\tau)\longmapsto\log F(\varrho\,\mathrm{e}^{i\vartheta},\alpha+i\tau)$ au point $(0,0)$. En particulier, sous les mêmes conditions et pour $k\gg(\log_2 x)^{12}$, on a

$$\pi_k(x)=\frac{\varrho^{-k}x^\alpha F(\varrho,\alpha)}{2\pi\alpha\sqrt{\delta}}\Big\{1+O_\varepsilon\Big(\frac{(\log_2 x)^5}{\sqrt{k}}\Big)\Big\}.\tag{3·16}$$

L'existence du hessien

$$\delta:=\partial_\vartheta^2 g(0,0)\times\partial_\tau^2 g(0,0)-\big\{\partial_\vartheta\partial_\tau g(0,0)\big\}^2$$

découle de l'existence et de la différentiabilité de l'application g au voisinage de $(0,0)$. Celles-ci seront justifiées au cours de la démonstration.

Lorsque $k\ll(\log x)/(\log_2 x)^2$, nous montrerons (formule (6·1)) que l'on a

$$\alpha\sqrt{\delta}=\sqrt{k/\varrho}(\log x)\{1+O(1/L_0)\}.$$

Cela permet de retrouver le résultat (3·9) de Hildebrand et Tenenbaum à partir de (3·15).

Nous donnons, dans les Propositions 1 à 8, des évaluations asymptotiques des quantités α, ϱ et δ. Elles permettent de déduire de la formule (3·15) des estimations explicites de $\pi_k(x)$. Ces évaluations sont présentées dans le chapitre suivant.

3.2.3. Estimations explicites de $\pi_k(x)$

Comme dans le cas du résultat de Hildebrand et Tenenbaum, l'évaluation implicite (3·15) fournit des formules explicites lorsqu'on y insère des approximations convenables de ϱ, α et δ. Ces estimations sont établies dans les Propositions 4 à 8.

Introduisons maintenant les notations nécessaires pour présenter ces évaluations.

Nous posons

$$w := \frac{K_x}{k} \tag{3·17}$$

et nous introduisons le paramètre κ défini implicitement par l'identité

$$k = \Big(1 - \frac{\kappa}{\log_2 x}\Big) K_x,$$

ou explicitement par la formule

$$\kappa := (1 - 1/w) \log_2 x. \tag{3·18}$$

Lorsque k parcourt l'intervalle $[1, K_{x,\varepsilon}]$, pour $\varepsilon > 0$ fixé, on constate donc que les paramètres w et κ vérifient, pour x assez grand, les inégalités

$$1 + \frac{\varepsilon}{\log_2 x} < w \leqslant K_x \qquad \text{et} \qquad \varepsilon < \kappa < \log_2 x.$$

Considérons

$$G(t) := t\,\mathrm{e}^t \int_t^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u\,\mathrm{e}^u} \qquad (t > 0). \tag{3·19}$$

La fonction G définit sur $]0, +\infty[$ une application strictement croissante à valeurs dans $]0, 1[$ qui vérifie, γ désignant la constante d'Euler,

$$G(t) = \begin{cases} t \log\big(\dfrac{1}{t}\big) - \gamma t + O\Big(t^2 \log \dfrac{1}{t}\Big) & (t \to 0+), \\ 1 - \dfrac{1}{t} + \dfrac{2}{t^2} + O\Big(\dfrac{1}{t^3}\Big) & (t \to +\infty). \end{cases} \tag{3·20}$$

Nous notons $G^{-1} :]0, 1[\to]0, +\infty[$ l'application réciproque de G et nous définissons la fonction $H :]1, +\infty[\to]0, +\infty[$ par

$$H(u) = \frac{1}{G^{-1}(1/u)}. \tag{3·21}$$

Les estimations (3·20) impliquent

$$H(w) = \begin{cases} w \log w + w \log_2 w - \gamma w + O\Big(\dfrac{w(\log_2 w)^2}{\log w}\Big) & (w \to +\infty), \\ w(w-1)\big\{1 + O\big((w-1)^2\big)\big\} & (w \to 1+). \end{cases} \tag{3·22}$$

En particulier, on a, uniformément pour $w \in]1, +\infty[$,

$$H(w) \asymp w \log w. \tag{3·23}$$

La fonction H est dérivable sur $]1,+\infty[$ et sa dérivée H' est une fonction strictement positive qui vérifie l'équation différentielle

$$H'(w) = \frac{H(w)^2}{w\big(H(w)+1-w\big)}\cdot$$

En combinant cette formule aux estimations précédentes de H, il vient

$$H'(w) = \begin{cases} \log w + \log_2 w + \gamma + 1 + O\Big(\dfrac{(\log_2 w)^2}{\log w}\Big) & (w \to +\infty), \\ 1 + O(w-1) \qquad (w \to 1+), \end{cases} \tag{3·24}$$

de sorte que l'on a, uniformément pour $w \in\,]1,+\infty[$,

$$H'(w) \asymp 1 + \log w. \tag{3·25}$$

Nous définissons également des fonctions S et φ sur $]1,+\infty[$ par

$$S(\sigma) := \frac{\sin(\pi/\sigma)}{\pi/\sigma} \qquad (\sigma > 1) \tag{3·26}$$

et

$$\varphi(\sigma) := 1 - \frac{\cos(\pi/\sigma)}{S(\sigma)} + \log S(\sigma) \qquad (\sigma > 1). \tag{3·27}$$

L'application φ définit une bijection décroissante de $]1,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ dont le comportement lorsque σ tend vers 1 est donné par

$$\varphi(1+h) = \frac{1}{h} + \log h + 1 + O(h) \qquad (h \to 0+). \tag{3·28}$$

Nous notons $\psi :]0,+\infty[\to]1,+\infty[$ l'application réciproque de la fonction φ et nous remarquons que (3·28) implique

$$\psi(t) = 1 + \frac{1}{t} + O\Big(\frac{\log t}{t^2}\Big) \qquad (t \to +\infty). \tag{3·29}$$

Les définitions de w, H et ψ données ci-dessus nous permettent alors d'introduire la quantité

$$\beta = \beta(x,k) := \psi\big(H(w)\log_2 x\big)\cdot \tag{3·30}$$

Il résulte des estimations précédentes que β vérifie

$$\beta = \begin{cases} 1 + \dfrac{k\log w}{\log x} + O\Big(\dfrac{k\log_2 w}{(\log w)^2 \log x}\Big) & \text{si } k = o(K_x), \\ 1 + \dfrac{1}{H(w)\log_2 x} + O_{w_0}\Big(\dfrac{\log_3 x}{(\log_2 x)^2}\Big) & \text{si } w \geqslant w_0 \text{ avec } w_0 > 1, \\ 1 + \dfrac{1}{\kappa} + O\Big(\dfrac{\log(1+\kappa)}{\kappa^2} + \dfrac{1}{\log_2 x}\Big) & \text{si } k \sim K_x, \\ \psi(\kappa) + O_{\varepsilon,\kappa_0}\Big(\dfrac{1}{\log_2 x}\Big) & \text{si } \varepsilon < \kappa < \kappa_0 \text{ avec } \kappa_0 > \varepsilon. \end{cases} \tag{3·31}$$

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on a, uniformément pour $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$,

$$\beta - 1 \asymp \frac{1}{w(\log w)\log_2 x} \ll 1. \tag{3·32}$$

Avant de présenter nos estimations de α, ϱ et δ, nous introduisons la fonction

$$\kappa_1(\sigma) := \exp\Big\{-\frac{\sigma S(\sigma)^2}{1-S(\sigma)^2}\Big(\frac{1}{S(\sigma)^2}+1-\varphi(\sigma)^2-\varphi(\sigma)\Big)\Big\} \qquad (\sigma>1). \tag{3·33}$$

On peut noter que

$$\kappa_1(1+h) = 1+2h\log h+O(h) \qquad (h\to 0+) \tag{3·34}$$

de sorte que, pour tout $\varepsilon>0$ fixé, on ait $\kappa_1(\beta)\asymp 1$ pour $1\leqslant k\leqslant K_{x,\varepsilon}$ et, de manière plus précise, $\kappa_1(\beta)\to 1$ si $\kappa\to+\infty$.

Avec les notations précédentes, nous pouvons énoncer les estimations de α, ϱ et δ que nous démontrons dans les Propositions 7 et 8. Nous donnons, dans les Propositions 4, 5 et 6, des résultats plus précis sur le comportement asymptotique de α et ϱ dans certains sous-domaines de l'intervalle $[1, K_{x,\varepsilon}]$.

Proposition 1. *On a, uniformément pour x assez grand et $1\leqslant k\leqslant K_{x,\varepsilon}$,*

$$\alpha-1 = (\beta-1)\Big\{1+O_\varepsilon\Big(\frac{(\log_3 x)^{1/2}}{(\log_2 x)^{1/2}}\Big)\Big\}, \tag{3·35}$$

$$\varrho = \kappa_1(\beta)\big(S(\beta)\log x\big)^\beta\Big\{1+O_\varepsilon\Big(\frac{1}{(\log_2 x)^{1/4}}\Big)\Big\} \tag{3·36}$$

et

$$\delta = \frac{1-S(\beta)^2}{\beta^2 S(\beta)^2}\frac{k^2}{H'(w)}\Big\{1+O_\varepsilon\Big(\frac{1}{(\log_2 x)^{1/4}}\Big)\Big\}. \tag{3·37}$$

En particulier, on a, uniformément pour x assez grand et $1\leqslant k\leqslant K_{x,\varepsilon}$,

$$\alpha-1\asymp\frac{1}{w(\log w)\log_2 x}\ll 1, \qquad \varrho\asymp\Big(\frac{k}{\log w}\Big)^\beta, \tag{3·38}$$

et

$$\delta\asymp\frac{(w-1)\log w}{w}(\log x)^2. \tag{3·39}$$

En introduisant les évaluations de la Proposition 1 dans la formule (3·15), nous obtenons une estimation de $\pi_k(x)$ du même type que (3·10), valide pour les grandes valeurs de k.

Corollaire 4. *Soient* $\varepsilon>0$ et $\eta>0$. *Pour x assez grand et $(\log_2 x)^{1+\eta}\ll k\leqslant K_{x,\varepsilon}$, on a*

$$\pi_k(x) = x^\beta\Big(\frac{\mathrm{e}}{S(\beta)\log x}\Big)^{k\beta}\exp\Big\{O_{\eta,\varepsilon}\Big(\frac{k}{(\log_2 x)^{1/4}}\Big)\Big\}. \tag{3·40}$$

L'estimation (3·10) fournit une évaluation de $\pi_k(x)$ lorsque $k\ll K_x/\log_2 x$. La formule (3·40) prend le relais lorsque $\mathrm{e}^{-(\log_2 x)^{1/8}}K_x\leqslant k\leqslant K_{x,\varepsilon}$. On obtient par exemple,

$$\pi_k(x) = \begin{cases} x^{1-1/w}\exp\Big\{O_{w_0}\Big(\frac{(\log_3 x)\log x}{\log_2 x}\Big)\Big\} & \text{si } w>w_0 \text{ avec } w_0>1,\\ x^{1-1/w}\exp\Big\{O\Big(\frac{\log(1+\kappa)\log x}{\kappa}+\frac{\kappa\log x}{\log_2 x}\Big)\Big\} & \text{si } k\sim K_x,\\ x^{O_{\varepsilon,\kappa_0}(1/\log_2 x)} & \text{si } \varepsilon<\kappa<\kappa_0 \text{ avec } \kappa_0>\varepsilon. \end{cases} \tag{3·41}$$

En particulier, on voit que $\pi_k(x) = x^{o(1)}$ si, et seulement si, $k\sim K_x$.

3.2.4. Estimations semi-asymptotiques

On sait par ailleurs que l'un des attraits de la méthode du col est de permettre l'étude du comportement local et l'obtention de formules semi-asymptotiques. Dans ce cadre, nous obtenons deux résultats (les Corollaires 8 et 9) qui généralisent (3·11) et (3·12). Par souci de simplicité, nous présentons ici une version légèrement moins précise de ces résultats. Les notations sont celles du paragraphe précédent.

Corollaire 5. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour x assez grand et $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, on a*

$$\frac{\pi_{k+1}(x)}{\pi_k(x)} = \frac{1 + O\big(1/(\log_2 x)^{1/4}\big)}{\kappa_1(\beta)\big(S(\beta)\log x\big)^{\beta}}. \tag{3·42}$$

En particulier, on a sous les mêmes conditions

$$\frac{\pi_{k+1}(x)}{\pi_k(x)} \asymp \Big(\frac{\log w}{k}\Big)^{\beta}. \tag{3·43}$$

Ce résultat permet de retrouver la décroissance de la suite $k \mapsto \pi_k(x)$ sur l'intervalle $\log_2 x + O(1) \ll k \leqslant K_{x,\varepsilon}$ par une méthode différente de celle de Balazard. Nous obtenons également la forme effective de la décroissance (en k) de la suite $\pi_k(x)$ pour les grandes valeurs de k. Ainsi, la formule (3·43) et les majorations qui en découlent,

$$\frac{\pi_{k+1}(x)}{\pi_k(x)} \ll \frac{1}{k}\log\Big(\frac{K_x}{k}\Big) \ll \frac{\log_2 x}{k},$$

illustrent un comportement de décroissance très rapide de la suite lorsque k devient grand. Par exemple, si $\varepsilon K_x \leqslant k \leqslant (1-\varepsilon)K_x$ avec $\varepsilon > 0$ fixé, on a

$$\frac{\pi_{k+1}(x)}{\pi_k(x)} = \frac{H(w)}{\mathrm{e}^{1/H(w)}}\frac{\log_2 x}{\log x}\Big\{1 + O_\varepsilon\Big(\frac{1}{(\log_2 x)^{1/4}}\Big)\Big\} \asymp_\varepsilon \frac{\log_2 x}{\log x}.$$

Pour $k > K_{x,\varepsilon}$ avec $\varepsilon < \log 2$, on peut compléter la démonstration de l'unimodalité de $k \mapsto \pi_k(x)$ en utilisant un argument combinatoire dû à Balazard. Nous énonçons ici ce résultat dont nous présentons, au paragraphe 6, la démonstration de Balazard. Nous obtenons ainsi une preuve complète de l'unimodalité de $\pi_k(x)$ indépendante du raisonnement par récurrence de Balazard et des résultats d'Alladi pour la fonction $\pi_k(x,y)$.

Proposition 2 (Balazard, 1989). *Soit $\varepsilon_0 < \log 2 = 0,69315\ldots$. Pour $x \geqslant x_0(\varepsilon_0)$ et $k \geqslant K_{x,\varepsilon_0}$, on a $\pi_{k+1}(x) \leqslant \pi_k(x)$.*

Pour les « faibles variations en x », nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 6. *Soient $\varepsilon, \varepsilon' > 0$. On a, uniformément pour x assez grand, $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$ et $1 \leqslant \lambda \leqslant x^{O(1-1/w)}$,*

$$\frac{\pi_k(\lambda x)}{\lambda \pi_k(x)} = \Big(\frac{\log(\lambda x)}{\log x}\Big)^{(\beta-1)\log x - 1}\exp\Big\{O_{\varepsilon,\varepsilon'}\Big(\frac{1}{(\log_2 x)^{1/4}} + \frac{(\log_3 x)^{1/2}}{(\log_2 x)^{1/2}}\frac{k\log\lambda}{\log w\log x}\Big)\Big\}. \tag{3·44}$$

En particulier, la relation asymptotique

$$\pi_k(\lambda x) \sim \lambda \pi_k(x) \qquad (x \to +\infty)$$

est vérifiée pour $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, si, et seulement si, $\log\lambda = o\big((\log w \log x)/|k - \log w|\big)$.

4. Existence, unicité et estimations du col

Dans ce chapitre, nous établissons les estimations nécessaires pour la fonction $F(z,s)$ et les quantités ϱ, α et δ. Rappelons que F est définie par (3·7), que α et ϱ sont les solutions (sous réserve d'existence) du système (3·8) et que δ est le hessien (là encore sous réserve d'existence) de l'application $g : (\vartheta, \tau) \longmapsto \log F(\varrho\, \mathrm{e}^{i\vartheta}, \alpha + i\tau)$ au point $(0,0)$.

Dans toute la suite, nous écrivons $z = r\,\mathrm{e}^{i\vartheta}$ et $s = \sigma + i\tau$ où $r \geqslant 0$, $-\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ et σ, τ sont deux nombres réels. Nous restreignons les variables z et s au domaine

$$(4{\cdot}1) \qquad r > 0, \qquad |\vartheta| \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \sigma > 1, \qquad |\tau| \leqslant \frac{1}{2\log(r+2)}.$$

On vérifie alors que $\mathcal{R}\mathrm{e}(1 + z/(p^s - 1)) > 0$, ce qui nous permet d'écrire la fonction $F(z,s)$ sous la forme $F(z,s) = \exp f(z,s)$ où $f(z,s)$ est définie par la série absolument convergente

$$(4{\cdot}2) \qquad f(z,s) = \sum_p \log\Big(1 + \frac{z}{p^s - 1}\Big),$$

dans laquelle les logarithmes sont pris en valeurs principales.

Dans le domaine complexe (4·1), la fonction $f(z,s)$ est une fonction analytique de deux variables et possède donc des dérivées partielles $\partial_z^\ell \partial_s^m f$ à tout ordre.[6] Pour des raisons pratiques, nous adoptons la notation $f_{z\ldots zs\ldots s}$, où les lettres z et s sont répétées respectivement ℓ et m fois, pour désigner la dérivée partielle $\partial_z^\ell \partial_s^m f$.

4.1. Existence et unicité du col

Rappelons que $K = K_x$ est défini comme l'unique nombre entier tel que $p_1 \ldots p_K \leqslant x < p_1 \ldots p_K p_{K+1}$ ou, ce qui revient au même, tel que $\vartheta(p_K) \leqslant \log x < \vartheta(p_{K+1})$.[7] Nous allons démontrer que le système (3·8) défini par

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_p \frac{1}{p^\sigma - 1 + r} = \frac{k}{r}, \\ \displaystyle\sum_p \frac{r\log p}{(1 - p^{-\sigma})(p^\sigma - 1 + r)} = \log x. \end{cases}$$

admet une solution unique $(r, \sigma) \in\,]0, +\infty[\times]1, +\infty[$ si $1 \leqslant k < K_x$ et qu'il n'en admet pas si $k > K_x$.[8] Ce résultat implique donc en particulier l'existence et l'unicité du point col (ϱ, α) lorsque $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ fixé.

Il est remarquable qu'il y ait une adéquation aussi forte entre le domaine d'existence du col (ϱ, α) et le domaine sur lequel la fonction $\pi_k(x)$ n'est pas nulle. C'est une preuve supplémentaire de la pertinence de la méthode du col pour évaluer la fonction $\pi_k(x)$.

Proposition 3. *Soit $x \geqslant 3$. Si $\vartheta(p_K) < \log x$ (resp. $\vartheta(p_K) = \log x$), le système (3·8) admet une solution unique (ϱ, α) avec $\varrho > 0$ et $\alpha > 1$ si, et seulement si, $1 \leqslant k \leqslant K_x$ (resp. $1 \leqslant k < K_x$).*

---

6. Sous réserve d'existence de α et ϱ, l'analycité de f justifie l'existence du hessien δ.
7. ϑ désigne la fonction de Chebychev définie par $\vartheta(y) := \sum_{p \leqslant y} \log p$.
8. Voir la note 3 pour le cas où $k = K_x$.

Démonstration. Fixons $x \geqslant 3$ et considérons la seconde équation du système (3·8), c'est-à-dire

$$\sum_p \frac{r \log p}{(1-p^{-\sigma})(p^\sigma - 1 + r)} = \log x. \tag{4·3}$$

Pour un nombre réel $\sigma > 1$ fixé, le membre de gauche de (4·3) est une fonction de r strictement croissante qui varie de 0^+ à $+\infty$ quand r parcourt l'intervalle $]0, +\infty[$. Il existe ainsi un unique réel strictement positif $r(\sigma)$ tel que (4·3) soit vérifiée pour $r = r(\sigma)$. Il nous reste donc à montrer que, sous les hypothèses de l'énoncé, il existe un unique nombre réel $\alpha > 1$ tel que la première équation du système (3·8) soit vérifiée pour $\sigma = \alpha$ et $r = r(\alpha)$. Autrement dit, si l'on pose

$$h(\sigma) = \sum_p \frac{r(\sigma)}{p^\sigma - 1 + r(\sigma)},$$

nous devons démontrer l'existence et l'unicité d'une solution $\sigma = \alpha > 1$ à l'équation $h(\sigma) = k$.

Observons d'abord que $r(\sigma)$ et donc $h(\sigma)$ sont des fonctions dérivables pour $\sigma > 1$. Nous allons démontrer que

$$h'(\sigma) > 0 \qquad (\sigma > 1), \tag{4·4}$$

$$\lim_{\sigma \to 1^+} h(\sigma) = 0 \tag{4·5}$$

et

$$\lim_{\sigma \to +\infty} h(\sigma) = K_x + \frac{\log x - \vartheta(p_K)}{\log(p_{K+1})}\cdot \tag{4·6}$$

Le résultat annoncé découle de ces trois relations.

Commençons par démontrer (4·4). L'égalité $h(\sigma) = r(\sigma) f_z(r(\sigma), \sigma)$ implique que

$$h'(\sigma) = r'(\sigma)\Big(f_z(r(\sigma),\sigma) + r(\sigma) f_{zz}(r(\sigma),\sigma)\Big) + r(\sigma) f_{zs}(r(\sigma),\sigma)$$

et l'identité $-f_s(r(\sigma),\sigma) = \log x$ fournit

$$r'(\sigma) = -\frac{f_{ss}(r(\sigma),\sigma)}{f_{zs}(r(\sigma),\sigma)}\cdot$$

Nous en déduisons que

$$h'(\sigma) = \frac{1}{-f_{zs}(r(\sigma),\sigma)}\Big\{f_{ss}(r(\sigma),\sigma)\Big(f_z(r(\sigma),\sigma) + r(\sigma) f_{zz}(r(\sigma),\sigma)\Big) - r(\sigma) f_{zs}(r(\sigma),\sigma)^2\Big\}.$$

Or

$$\begin{aligned} f_z(r,\sigma) + r f_{zz}(r,\sigma) &= \sum_p \frac{p^\sigma - 1}{(p^\sigma - 1 + r)^2}, \\ f_{ss}(r,\sigma) &= r \sum_p \frac{p^{2\sigma} (\log p)^2 (p^\sigma - (1-r)p^{-\sigma})}{(p^\sigma - 1)^2 (p^\sigma - 1 + r)^2}, \\ f_{zs}(r,\sigma) &= -\sum_p \frac{p^\sigma \log p}{(p^\sigma - 1 + r)^2}\cdot \end{aligned}$$

Il découle donc de l'inégalité de Cauchy–Schwarz que

$$\begin{aligned} f_{ss}(r,\sigma)\big(f_z(r,\sigma)+rf_{zz}(r,\sigma)\big) &\geqslant r\left(\sum_p \frac{p^\sigma \log p}{(p^\sigma-1+r)^2}\sqrt{\frac{p^{2\sigma}-1+r}{p^\sigma(p^\sigma-1)}}\right)^2 \\ &> r\bigg(\sum_p \frac{p^\sigma \log p}{(p^\sigma-1+r)^2}\bigg)^2 = rf_{zs}(r,\sigma)^2 \end{aligned}$$

ce qui fournit (4·4).

Pour démontrer (4·5), nous notons que

$$\sum_p \frac{r\log p}{(1-p^{-\sigma})(p^\sigma-1+r)} \asymp \sum_{p\leqslant r^{1/\sigma}} \log p + r\sum_{p>r^{1/\sigma}} \frac{\log p}{p^\sigma} \tag{4·7}$$

et

$$\sum_p \frac{r}{p^\sigma-1+r} \asymp \sum_{p\leqslant r^{1/\sigma}} 1 + r\sum_{p>r^{1/\sigma}} \frac{1}{p^\sigma}\cdot \tag{4·8}$$

Nous déduisons de (4·7) et (4·3) que $r(\sigma)^{1/\sigma} \ll \log x$ uniformément pour $\sigma > 1$. De plus, en utilisant l'estimation

$$\sum_{p>z} \frac{\log p}{p^\sigma} \asymp \frac{z^{1-\sigma}}{\sigma-1} \qquad (z \gg 1,\ 1<\sigma\ll 1),$$

qui découle aisément du théorème des nombres premiers, nous obtenons que

$$r(\sigma)^{1/\sigma} \asymp (\sigma-1)\log x \qquad (1<\sigma\ll 1). \tag{4·9}$$

De (4·8), (4·9) et de la relation $\sum_p p^{-\sigma} \sim \log(\sigma-1)$ $(\sigma\to 1)$, il suit que

$$\lim_{\sigma\to 1^+} h(\sigma) = \lim_{\sigma\to 1^+} r(\sigma)\sum_p \frac{1}{p^\sigma} = 0$$

ce qui démontre (4·5).

Pour démontrer (4·6), nous procédons en trois étapes. Dans la première, nous associons l'équation (4·3) et la majoration $\vartheta(p_K) \leqslant \log x$ pour comparer la croissance de la fonction $\sigma \mapsto r(\sigma)$ à celles des fonctions puissances de la forme p^σ pour $p \leqslant p_K$. Dans notre deuxième étape, nous procédons de même avec la minoration $\vartheta(p_{K+1}) > \log x$, pour comparer les croissances de $\sigma \mapsto r(\sigma)$ et $\sigma \mapsto p^\sigma$ pour $p \geqslant p_{K+2}$. Nous déduisons alors des deux premières étapes, en passsant à la limite dans (4·3), le comportement du rapport $r(\sigma)/(p_{K+1})^\sigma$ quand $\sigma\to+\infty$. Il reste alors à passer à la limite dans la définition de $h(\sigma)$ pour conclure.

Avec l'inégalité $\vartheta(p_K) \leqslant \log x$, l'équation (4·3) implique

$$\sum_{p>p_K} \frac{r(\sigma)\log p}{(1-p^{-\sigma})(p^\sigma-1+r(\sigma))} \geqslant \sum_{p\leqslant p_K} \frac{p^\sigma\log p}{p^\sigma-1+r(\sigma)} - \sum_{p\leqslant p_K} \frac{\log p}{p^\sigma-1}\cdot$$

Le membre de gauche est

$$\ll r(\sigma) \sum_{p>p_K} \frac{\log p}{p^\sigma} \ll \frac{r(\sigma)\log p_{K+1}}{(p_{K+1})^\sigma}$$

et le membre de droite est

$$\gg \frac{(p_K)^\sigma \log(p_K)}{(p_K)^\sigma + r(\sigma)} - \frac{\log(p_K)}{2^\sigma}.$$

Nous avons donc

$$\frac{r(\sigma)}{(p_{K+1})^\sigma} \gg \frac{1}{1 + r(\sigma)/(p_K)^\sigma} - \frac{1}{2^\sigma}$$

d'où

$$\frac{r(\sigma)}{(p_K)^\sigma}\Big(1 + \frac{r(\sigma)}{(p_K)^\sigma}\Big) \gg \Big(\frac{p_{K+1}}{p_K}\Big)^\sigma$$

puis

$$r(\sigma) \gg (p_K\, p_{K+1})^{\sigma/2}.$$

Cela implique

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \frac{r(\sigma)}{p^\sigma} = +\infty \qquad \text{si} \quad p \leqslant p_K. \tag{4·10}$$

Avec l'inégalité $\vartheta(p_{K+1}) > \log x$, l'équation (4·3) donne

$$\sum_{p>p_{K+1}} \frac{r(\sigma)\log p}{(1-p^{-\sigma})(p^\sigma - 1 + r(\sigma))} < \sum_{p\leqslant p_{K+1}} \frac{p^\sigma \log p}{p^\sigma - 1 + r(\sigma)} - \sum_{p\leqslant p_{K+1}} \frac{\log p}{p^\sigma - 1}. \tag{4·11}$$

Nous minorons le membre de gauche par

$$\frac{r(\sigma)\log(p_{K+2})}{(p_{K+2})^\sigma + r(\sigma)}$$

et nous majorons le membre de droite par

$$\frac{(p_{K+1})^\sigma}{r(\sigma)}\vartheta(p_{K+1}).$$

Il suit

$$\frac{r(\sigma)^2}{(p_{K+2})^{2\sigma}} \ll \Big(\frac{p_{K+1}}{p_{K+2}}\Big)^\sigma \Big(1 + \frac{r(\sigma)}{(p_{K+2})^\sigma}\Big)$$

et par conséquent

$$\frac{r(\sigma)}{(p_{K+2})^\sigma} \ll \Big(\frac{p_{K+1}}{p_{K+2}}\Big)^{\sigma/2} \qquad \text{i.e.} \qquad r(\sigma) \ll (p_{K+1}p_{K+2})^{\sigma/2}.$$

Cela implique

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \frac{r(\sigma)}{p^\sigma} = 0 \qquad \text{si} \quad p \geqslant p_{K+2}. \tag{4·12}$$

En passant à la limite ($\sigma \to +\infty$) dans (4·3), nous déduisons de (4·10) et (4·12) que

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \frac{r(\sigma)}{(p_{K+1})^\sigma - 1 + r(\sigma)} = \frac{\log x - \vartheta(p_K)}{\log(p_{K+1})}. \tag{4·13}$$

En reportant (4·10), (4·12) et (4·13) dans la définition de $h(\sigma)$, nous obtenons (4·6). Cela achève la démonstration de la proposition. □

4.2. Évaluations du col

4.2.1. Énoncés des résultats

Nous allons maintenant énoncer quatre propositions dans lesquelles nous estimons les coordonnées ϱ et α du point col. Les trois premiers résultats fournissent des estimations de ϱ et α sur trois domaines distincts (et complémentaires) du paramètre k. Le quatrième donne une estimation valable sur l'ensemble du domaine $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$. Cette estimation est, en contrepartie, moins précise que les trois premières sur leurs domaines respectifs de validité.

Nous commençons par les estimations de α et ϱ pour les « petites » valeurs de k. Nous rappelons une partie du Lemme 2 de [19]. Pour un énoncé plus complet et une consultation de la démonstration, on se référera à [19]. Précisons que les notations employées ici sont légèrement différentes de celles du texte d'origine.

Proposition 4 (Hildebrand & Tenenbaum, 1988). *Il existe une constante c_5, $0 < c_5 < 1$, telle que pour $x \geqslant 3$ et*

$$1 \leqslant k \leqslant c_5 \frac{\log x}{\log_2 x}, \tag{4·14}$$

on ait

$$\alpha - 1 = \frac{\varrho}{\log x}\Big\{1 + O\Big(\frac{\varrho \log(2+\varrho)}{\log x}\Big)\Big\} \tag{4·15}$$

et

$$\varrho = \frac{k}{M_0}\{1 + O(R_0)\} = \frac{k}{L_0}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log L_0}{L_0}\Big)\Big\}, \tag{4·16}$$

où L_0, M_0 et R_0 sont définis par

$$\begin{aligned} L_0 &= \log\Big(\frac{\log x}{k\log(k+1)}\Big), \\ M_0 &= \log\Big(\frac{\log x}{k\log(2+k/L_0)}\Big) + \log_2\Big(\frac{L_0\log x}{k\log(2+k/L_0)}\Big) - \gamma, \\ R_0 &= \frac{1}{L_0}\Big(\frac{1}{\log(2+k/L_0)} + \frac{1}{L_0}\Big). \end{aligned}$$

Nous énonçons, dans la proposition suivante, des estimations de ϱ et α pour des valeurs « moyennes » de k. Rappelons que

$$w := \frac{K_x}{k}, \qquad \kappa := \frac{(w-1)\log_2 x}{w}$$

et que $H(u)$ est définie implicitement par $uG\big(1/H(u)\big) = 1$ ou encore par

$$H(u) := \frac{1}{G^{-1}(1/u)} \qquad (u > 1)$$

où la fonction G^{-1} est la réciproque de l'application G définie par (3·19). Le comportement asymptotique de H est décrit par les estimations (3·22) et (3·23) énoncées dans l'introduction.

Proposition 5. *Il existe une constante $c_6 > 0$ telle que pour x assez grand et*

$$\mathrm{e}^{-c_6(\log_2 x)^{4/7}} K_x \leqslant k \leqslant \Big(1 - \frac{1}{(\log_2 x)^{1/3}}\Big) K_x, \tag{4·17}$$

on a

$$\alpha - 1 = \frac{1 + O(R_1)}{H(w)\log_2 x} \tag{4·18}$$

et

$$\varrho = \frac{\mathrm{e}^{1/H(w)}}{H(w)} \frac{\log x}{\log_2 x}\Big\{1 + O\Big(\frac{wR_1}{w-1}\Big)\Big\}, \tag{4·19}$$

où

$$R_1 := \frac{\log w}{\log_2 x} + \frac{\log(1+\kappa)}{\kappa} + \frac{\log_2 x}{\kappa^2}\cdot \tag{4·20}$$

Nous établissons enfin des estimations de ϱ et α pour des « grandes » valeurs de k. Rappelons que les quantités β et $\kappa_1(\beta)$ ont été définies par

$$\beta := \psi\big(H(w)\log_2 x\big)$$

et

$$\kappa_1(\beta) := \exp\Big\{ - \frac{\beta S(\beta)^2}{1 - S(\beta)^2}\Big(\frac{1}{S(\beta)^2} + 1 - \varphi(\beta)^2 - \varphi(\beta)\Big)\Big\},$$

et que le comportement de ces fonctions a été décrit dans l'introduction.

Proposition 6. *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante $c_7 > 0$ telle que pour x assez grand et*

$$c_7 K_x \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}, \tag{4·21}$$

on ait

$$\alpha - 1 = \Big(\beta - 1 + \frac{\log \kappa_1(\beta)}{\log_2 x}\Big)\big\{1 + O\big((w-1)^2\big)\big\}. \tag{4·22}$$

et

$$\varrho = \kappa_1(\beta)\big(S(\beta)\log x\big)^{\beta}\{1 + O(w-1)\}. \tag{4·23}$$

En particulier, on a dans le domaine (4·21)

$$\alpha - 1 = (\beta - 1)\{1 + O(R_2)\}, \tag{4·24}$$

où

$$R_2 := (w-1)^2 + \frac{\log(1+\kappa)}{\log_2 x}\cdot \tag{4·25}$$

Nous sommes maintenant en mesure de préciser le comportement asymptotique de α et ϱ sur l'intégralité du domaine $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$.

Proposition 7. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour x assez grand et $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, on a*

$$\alpha - 1 = (\beta - 1)\{1 + O(\mathcal{R})\} \tag{4·26}$$

et

$$\varrho = \kappa_1(\beta)\big(S(\beta)\log x\big)^{\beta}\{1 + O(\mathcal{E})\}. \tag{4·27}$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \min\Big\{\frac{\log_2(2+w)}{\log(2+w)}\,;\,\frac{\log w}{\log_2 x} + \frac{\log(1+\kappa)}{\kappa} + \frac{\log_2 x}{\kappa^2}\,;\,\frac{\kappa^2}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log(1+\kappa)}{\log_2 x}\Big\}\\ &\ll \frac{(\log_3 x)^{1/2}}{(\log_2 x)^{1/2}}\end{aligned} \tag{4·28}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \min\Big\{\frac{\log_2(2+w)}{\log(2+w)}\,;\,\frac{\log w}{\kappa} + \frac{\log(1+\kappa)\log_2 x}{\kappa^2} + \frac{(\log_2 x)^2}{\kappa^3}\,;\,\frac{\kappa}{\log_2 x}\Big\}\\ &\ll \frac{1}{(\log_2 x)^{1/4}}\,.\end{aligned} \tag{4·29}$$

En particulier, on a, uniformément pour x assez grand et $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$,

$$\alpha - 1 \asymp \frac{1}{w\log w\log_2 x} \qquad \text{et} \qquad \varrho \asymp \Big(\frac{k}{\log w}\Big)^{\beta}. \tag{4·30}$$

4.2.2. Un lemme technique

L'énoncé suivant est un lemme technique dans lequel nous évaluons les dérivées partielles de la fonction f définie par (4·2). Rappelons que les fonctions G et S sont définies par (3·19) et (3·26) et introduisons, pour $\sigma > 1$, les coefficients

$$a_\sigma := \pi\mathrm{cotan}\Big(\frac{\pi}{\sigma}\Big) \qquad \text{et} \qquad b_\sigma := \frac{\sigma}{\sigma - 1},$$

de sorte que $a_\sigma = -b_\sigma\{1 + O(\sigma - 1)\}$.

Lemme 11. *Il existe une constante absolue $c_8 > 0$ telle qu'uniformément pour $r \to +\infty$ et $1 < \sigma \ll 1$, on a*

$$f_z(r,\sigma) = \frac{\sigma r^{1/\sigma}}{(\sigma-1)\,r\log r}\Big\{G\Big(\frac{\sigma-1}{\sigma}\log r\Big) + O\Big((\sigma-1) + \mathrm{e}^{-c_8(\log r)^{4/7}}\Big)\Big\} \tag{4·31}$$

$$f_z(r,\sigma) = \frac{\sigma r^{1/\sigma}}{S(\sigma) r\log r}\Big\{1 + \frac{a_\sigma}{\log r} + \frac{\pi^2 + 2a_\sigma^2}{(\log r)^2} + O\Big(\frac{1}{\{(\sigma-1)\log r\}^3}\Big)\Big\}, \tag{4·32}$$

$$f_{zz}(r,\sigma) = -\,\frac{(\sigma-1) r^{1/\sigma}}{S(\sigma) r^2\log r}\Big\{1 + \frac{a_\sigma + b_\sigma}{\log r} + \frac{\pi^2 + 2a_\sigma^2 + 2a_\sigma b_\sigma}{(\log r)^2} + O\Big(\frac{1}{(\log r)^3}\Big)\Big\}, \tag{4·33}$$

$$f_s(r,\sigma) = -\,\frac{r^{1/\sigma}}{S(\sigma)}\Big\{1 + O\Big(\mathrm{e}^{-c_8(\log r)^{4/7}}\Big)\Big\}, \tag{4·34}$$

$$f_{ss}(r,\sigma) = \frac{r^{1/\sigma}\,\log r}{\sigma^2 S(\sigma)}\Big(1 + \frac{\sigma - a_\sigma}{\log r}\Big)\Big\{1 + O\Big(\mathrm{e}^{-c_8(\log r)^{4/7}}\Big)\Big\}, \tag{4·35}$$

$$f_{zs}(r,\sigma) = -\,\frac{r^{1/\sigma}}{\sigma S(\sigma) r}\Big\{1 + O\Big(\mathrm{e}^{-c_8(\log r)^{4/7}}\Big)\Big\}. \tag{4·36}$$

Par ailleurs, uniformément pour z et s vérifiant (4·1), $r \to +\infty$ et $1 < \sigma \ll 1$, on a pour $\ell \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, $\ell + m \geqslant 2$,

$$\partial_z^\ell \partial_s^m f(z,s) \ll_{\ell,m} \frac{r^{1/\sigma}}{(\sigma-1)^{\lambda_\ell}\, r^\ell}\Big\{(\log r)^{m-1} + \frac{\lambda_\ell}{(\sigma-1)^{m-1}}\Big\} \tag{4·37}$$

où $\lambda_j = 1$ si $j = 0, 1$ et $\lambda_j = 0$ si $j \geqslant 2$.

Démonstration. Dans cette démonstration, la lettre c désigne une constante strictement positive qui peut varier d'une ligne à l'autre. Posons $R := r-1$ et considérons tout d'abord la situation où r et σ sont deux variables telles que $r \to +\infty$ *et* $1 < \sigma \ll 1$.

Nous commençons par établir les estimations (4·31), (4·32) et (4·33).

Le calcul de la dérivée partielle de f par rapport à z à l'ordre $\ell \geqslant 1$ donne

$$\partial_z^\ell f(r,\sigma) = (-1)^{\ell-1} \sum_p \frac{(\ell-1)!}{(p^\sigma + R)^\ell} = (-1)^{\ell-1}(\ell-1)! \int_{2^-}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\pi(t)}{(t^\sigma + R)^\ell}\cdot$$

En utilisant une intégration par partie et le théorème des nombres premiers, nous obtenons alors, pour $\ell \geqslant 1$,

$$\frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\partial_z^\ell f(r,\sigma) = P_\ell + O\Big(\int_2^\infty \frac{t^\sigma\,\mathrm{e}^{-c(\log t)^{4/7}}}{(t^\sigma+R)^{\ell+1}}\mathrm{d}t\Big)$$

avec

$$P_\ell := \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(t^\sigma+R)^\ell \log t}\cdot$$

En distinguant les deux domaines d'intégration $2 \leqslant t \leqslant R^{1/\sigma}$ et $t > R^{1/\sigma}$, nous majorons facilement l'intégrale dans le O par

$$\int_2^{R^{1/\sigma}} \frac{t^\sigma\,\mathrm{e}^{-c(\log t)^{4/7}}}{R^{\ell+1}}\mathrm{d}t + \int_{R^{1/\sigma}}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-c(\log t)^{4/7}}}{t^{\sigma\ell}}\mathrm{d}t \ll \frac{R^{1/\sigma}\,\mathrm{e}^{-c(\log R)^{4/7}}}{(\ell\sigma-1)R^\ell},$$

de sorte que

$$\frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\partial_z^\ell f(r,\sigma) = P_\ell + O\Big(\frac{R^{1/\sigma}\,\mathrm{e}^{-c(\log R)^{4/7}}}{(\ell\sigma-1)R^\ell}\Big)\cdot \tag{4·38}$$

Nous allons utiliser cette formule pour démontrer successivement (4·31), (4·32) et (4·33).

Pour démontrer (4·31), nous introduisons la quantité I_1 définie par

$$I_1 := \frac{\sigma R^{1/\sigma}}{(\sigma-1)R\log R} G\Big(\frac{\sigma-1}{\sigma}\log R\Big) = \int_{(\sigma-1)\log R^{1/\sigma}}^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u\,\mathrm{e}^u}\cdot$$

En effectuant le changement de variable $u = (\sigma-1)\log t$, nous obtenons

$$I_1 = \int_{R^{1/\sigma}}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\sigma \log t}\cdot$$

On a donc

$$|P_1 - I_1| \leqslant \int_2^{R^{1/\sigma}} \frac{\mathrm{d}t}{(t^\sigma+R)\log t} + R\int_{R^{1/\sigma}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\sigma(t^\sigma+R)\log t} \ll \frac{R^{1/\sigma}}{R\log R}\cdot$$

D'après (4·38), il suit

$$\begin{aligned} f_z(r,\sigma) &= I_1 + O\Big(|P_1 - I_1| + \frac{R^{1/\sigma}\,\mathrm{e}^{-c(\log R)^{4/7}}}{(\ell\sigma-1)R^\ell}\Big) \\ &= \frac{\sigma R^{1/\sigma}}{(\sigma-1)\,R\log R}\Big\{G\Big(\frac{\sigma-1}{\sigma}\log R\Big) + O\big((\sigma-1) + \mathrm{e}^{-c_8(\log R)^{4/7}}\big)\Big\}. \end{aligned}$$

L'erreur que l'on commet alors en remplaçant R par r est absorbée par le terme d'erreur. Nous en déduisons donc (4·31).

Démontrons maintenant (4·32) et (4·33). Dans l'intégrale définissant P_ℓ, nous constatons que la contribution du domaine $2 \leqslant t \leqslant R^{1/(2\sigma)}$ se majore aisément par $R^{1/(2\sigma)}/(R^\ell \log R)$. En effectuant par ailleurs le changement de variable transformant t en $tR^{1/\sigma}$ sur le domaine $t \geqslant R^{1/(2\sigma)}$, nous obtenons que

$$P_\ell = \frac{R^{1/\sigma}}{R^\ell} \int_{2R^{-1/\sigma}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^\sigma+1)^\ell \log(tR^{1/\sigma})} + O\Big(\frac{R^{1/(2\sigma)}}{R^\ell \log R}\Big).$$

Or nous pouvons écrire, uniformément pour $t \geqslant R^{-1/(2\sigma)}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log(tR^{1/\sigma})} &= \frac{\sigma}{\log R}\frac{1}{1+\sigma(\log t)/\log R} \\ &= \frac{\sigma}{\log R}\Big\{1 - \frac{\sigma \log t}{\log R} + \frac{\sigma^2(\log t)^2}{(\log R)^2} + O\Big(\frac{(\log t)^3}{(\log R)^3}\Big)\Big\}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}P_\ell = \frac{\sigma R^{1/\sigma}}{R^\ell \log R}\Big\{ &\sum_{j=0}^{2} \frac{(-1)^j\sigma^j}{(\log R)^j} \int_{R^{-1/(2\sigma)}}^{\infty} \frac{(\log t)^j \,\mathrm{d}t}{(t^\sigma+1)^\ell} \\ &+ O\Big(\frac{1}{R^{1/(2\sigma)}} + \frac{1}{(\log R)^3}\int_0^\infty \frac{|\log t|^3 \,\mathrm{d}t}{(t^\sigma+1)^\ell}\Big)\Big\},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$P_\ell = \frac{\sigma R^{1/\sigma}}{R^\ell \log R}\Big\{\sum_{j=0}^{2}\frac{(-1)^j\sigma^j}{(\log R)^j} J_{\ell,j} + O\Big(\frac{1}{(\ell\sigma-1)^4(\log R)^3}\Big)\Big\} \qquad (\ell \geqslant 1), \tag{4·39}$$

avec

$$J_{\ell,j} = J_{\ell,j}(\sigma) := \int_0^\infty \frac{(\log t)^j \,\mathrm{d}t}{(t^\sigma+1)^\ell} \qquad (\ell \geqslant 1, j \geqslant 0).$$

Par application de la formule des résidus aux fonctions méromorphes $z \longmapsto (\log z)^j/(z^\sigma + 1)$ pour $j = 0, 1, 2$ sur le secteur angulaire (épointé en 0) compris entre la demi-droite des nombres réels positifs et la demi-droite d'origine 0 et d'angle polaire $2\pi/\sigma$, nous obtenons :

$$J_{1,0} = \frac{1}{S(\sigma)}, \qquad J_{1,1} = -\frac{a_\sigma}{\sigma S(\sigma)}, \qquad J_{1,2} = \frac{2a_\sigma^2+\pi^2}{\sigma^2 S(\sigma)},$$

$$J_{2,0} = \frac{1}{S(\sigma)b_\sigma}, \qquad J_{2,1} = -\frac{a_\sigma+b_\sigma}{\sigma S(\sigma)b_\sigma} \qquad \text{et} \qquad J_{2,2} = \frac{2a_\sigma^2+\pi^2+2a_\sigma b_\sigma}{\sigma^2 S(\sigma)b_\sigma}.$$

En reportant ces identités et (4·39) dans (4·38) pour $\ell = 1, 2$, nous aboutissons aux estimations

$$\begin{aligned}f_z(r,\sigma) = \frac{\sigma R^{1/\sigma}}{R \log R}\Big\{&\frac{1}{S(\sigma)} + \frac{a_\sigma}{S(\sigma)\log R} + \frac{2a_\sigma^2+\pi^2}{S(\sigma)(\log R)^2} \\ &+ O\Big(\frac{1}{(\sigma-1)^4(\log R)^3} + \frac{\mathrm{e}^{-c(\log R)^{4/7}}}{\sigma-1}\Big)\Big\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}f_z(r,\sigma) = \frac{\sigma R^{1/\sigma}}{R^2 \log R}\Big\{&\frac{1}{S(\sigma)b_\sigma} + \frac{a_\sigma+b_\sigma}{S(\sigma)b_\sigma \log R} + \frac{2a_\sigma^2+\pi^2+2a_\sigma b_\sigma}{S(\sigma)b_\sigma(\log R)^2} \\ &+ O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-c(\log R)^{4/7}}}{\sigma-1}\Big)\Big\}\end{aligned}$$

Les formules (4·32) et (4·33) en découlent en factorisant $S(\sigma) \asymp \sigma - 1$ et en constatant, à nouveau, que l'erreur commise en remplaçant R par r est absorbée par le terme d'erreur.

Pour évaluer $f_s(r,\sigma)$, nous constatons d'abord que

$$f_s(r,\sigma) = -r\sum_p \frac{\log p}{(1-p^{-\sigma})(p^\sigma-1+r)} = \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - (r-1)\sum_p \frac{\log p}{p^\sigma-1+r} \tag{4·40}$$

puis nous estimons

$$U_1(r,\sigma) := \sum_p \frac{\log p}{p^\sigma-1+r} = \sum_p \frac{\log p}{p^\sigma+R} = \int_{2-}^\infty \frac{\log t}{t^\sigma+R}\mathrm{d}\pi(t)$$

par les mêmes méthodes que précédemment (intégration par parties, théorème des nombres premiers, changement de variable transformant t en $tR^{1/\sigma}$, « remplacement » de R par $r\ldots$) :

$$\begin{aligned} U_1(r,\sigma) &= \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\sigma+R} + O\Big(\int_2^\infty \Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\log t}{t^\sigma+R}\Big)\Big| t\,\mathrm{e}^{-c(\log t)^{4/7}}\mathrm{d}t\Big)\\ &= \frac{r^{1/\sigma}}{r}J_{1,0} + O\Big(\frac{r^{1/\sigma}\,\mathrm{e}^{-c(\log r)^{4/7}}}{r(\sigma-1)}\Big)\\ &= \frac{r^{1/\sigma}}{rS(\sigma)}\big\{1+O\big(\mathrm{e}^{-c(\log r)^{4/7}}\big)\big\} \end{aligned} \tag{4·41}$$

car $J_{1,0} = 1/S(\sigma) \asymp 1/(\sigma-1)$. Nous obtenons (4·34) en reportant (4·41) dans (4·40) et en tenant compte de la majoration $(\zeta'/\zeta)(\sigma) \ll 1/(\sigma-1)$.

Avec des arguments similaires, nous obtenons

$$f_{ss}(r,\sigma) = \Big(\frac{\zeta'}{\zeta}\Big)'(\sigma) + (r-1)U_2(r,\sigma) \qquad \text{où} \qquad U_2(r,\sigma) := \sum_p \frac{(\log p)^2 p^\sigma}{(p^\sigma+R)^2}$$

et

$$\begin{aligned} U_2(r,\sigma) &= \int_2^\infty \frac{t^\sigma \log t\,\mathrm{d}t}{(t^\sigma+R)^2} + O\Big(\int_2^\infty \Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{(\log t)^2 t^\sigma}{(t^\sigma+R)^2}\Big)\Big| t\,\mathrm{e}^{-c(\log t)^{4/7}}\mathrm{d}t\Big)\\ &= \frac{r^{1/\sigma}\log r}{\sigma r}\Big\{J_{1,0} - J_{2,0} + \frac{\sigma}{\log r}(J_{1,1}-J_{2,1}) + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-c(\log r)^{4/7}}}{\sigma-1}\Big)\Big\}\\ &= \frac{r^{1/\sigma}\log r}{\sigma^2 S(\sigma) r}\Big(1+\frac{\sigma-a_\sigma}{\log r}\Big)\big\{1+O\big(\mathrm{e}^{-c(\log r)^{4/7}}\big)\big\}, \end{aligned}$$

car $J_{1,0} - J_{2,0} = 1/(\sigma S(\sigma)) \asymp 1/(\sigma-1)$ et $J_{1,1} - J_{2,1} = (\sigma - a_\sigma)/(\sigma^2 S(\sigma))$. La formule (4·35) découle alors de l'estimation de U_2 et de la majoration $(\zeta'/\zeta)'(\sigma) \ll 1/(\sigma-1)^2$.

Pour estimer $f_{zs}(r,\sigma)$, nous écrivons, avec les notations précédentes,

$$f_{zs}(r,\sigma) = -U_1(r,\sigma) + (r-1)U_3(r,\sigma) \qquad \text{où} \qquad U_3(r,\sigma) := \sum_p \frac{\log p}{(p^\sigma+r-1)^2}.$$

Toujours avec les mêmes méthodes, on a

$$\begin{aligned} U_3(r,\sigma) &= \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(t^\sigma+R)^2} + O\Big(\int_2^\infty \Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\log t}{(t^\sigma+R)^2}\Big)\Big| t\,\mathrm{e}^{-c(\log t)^{4/7}}\mathrm{d}t\Big)\\ &= \frac{r^{1/\sigma}}{r^2}J_{2,0}\big\{1+O\big(\mathrm{e}^{-c(\log r)^{4/7}}\big)\big\}, \end{aligned}$$

ce qui donne (4·36) lorsqu'on tient compte de (4·41) et de la valeur de $J_{2,0}$.

Dorénavant, nous nous plaçons dans les conditions (4·1), $r \to +\infty$ et $1 < \sigma \ll 1$. Nous allons majorer $|\partial_z^\ell \partial_s^m f(z,s)|$.

Dans le cas $m = 0$ et $\ell \geqslant 2$, nous avons, en vertu d'estimations classiques sur les sommes de nombres premiers,

$$\partial_z^\ell f(z,s) = (-1)^{\ell-1}(\ell-1)! \sum_p \frac{1}{(p^s+z-1)^\ell} \ll \sum_{p<r^{1/\sigma}} \frac{1}{r^\ell} + \sum_{p \geqslant r^{1/\sigma}} \frac{1}{p^{\ell\sigma}} \ll \frac{r^{1/\sigma}}{r^\ell \log r}\cdot$$

Pour $\ell = 0$ et $m \geqslant 2$, on démontre par récurrence l'existence d'une suite $(a_{0,m,j})_{j \geqslant 2}$ de nombres réels telle que

$$\partial_s^m f(z,s) = \Big(\frac{\zeta'}{\zeta}\Big)^{(m-1)}(s) + \sum_{j=2}^m a_{0,m,j}(z-1)^{j-1} \sum_p \frac{p^s (\log p)^m}{(p^s+z-1)^j}\cdot$$

Nous avons donc, en vertu de la majoration $(\zeta'/\zeta)^{(m-1)}(s) \ll 1/(\sigma-1)^m$ et d'estimations classiques sur les sommes de nombres premiers,

$$\begin{aligned}\partial_s^m f(z,s) &\ll \frac{1}{(\sigma-1)^m} + r \sum_{p \leqslant r^{1/\sigma}} \frac{(\log r)^{m-1} p^\sigma \log p}{r^2} + r \sum_{p > r^{1/\sigma}} \frac{(\log p)^m}{p^\sigma} \\ &\ll \frac{r^{1/\sigma}}{\sigma - 1}\Big\{(\log r)^{m-1} + \frac{1}{(\sigma-1)^{m-1}}\Big\}.\end{aligned}$$

De même, pour $m \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 1$, on démontre par récurrence l'existence de nombres réels $a_{\ell,m,j}$ tels que

$$\partial_z^\ell \partial_s^m f(z,s) = \sum_{j=1}^m a_{\ell,m,j} \sum_p \frac{p^{js}(\log p)^m}{(p^s+z-1)^{\ell+j}}$$

d'où

$$\begin{aligned}\partial_z^\ell \partial_s^m f(z,s) &\ll \sum_{p<r^{1/\sigma}} \frac{(\log r)^{m-1} p^\sigma \log p}{r^{\ell+1}} + \sum_{p \geqslant r^{1/\sigma}} \frac{(\log p)^m}{p^{\ell\sigma}} \\ &\ll \frac{r^{1/\sigma}}{(\sigma-1)^{\lambda_\ell} r^\ell}\Big\{(\log r)^{m-1} + \frac{\lambda_\ell}{(\sigma-1)^{m-1}}\Big\}.\end{aligned}$$

Cela termine la démonstration du lemme. □

4.2.3. Démonstration de la Proposition 5

Dans les Propositions 5 et 6, nous utilisons une technique identique pour évaluer α et ϱ. Nous commençons par remarquer que le système (3·8) peut se réécrire sous la forme

$$\begin{cases} \varrho f_z(\varrho,\alpha) = k, \\ -f_s(\varrho,\alpha) = \log x, \end{cases}$$

puis nous évaluons $f_z(\varrho,\alpha)$ et $f_s(\varrho,\alpha)$ à l'aide des estimations établies dans le Lemme 11. Nous obtenons alors deux conditions asymptotiques sur α et ϱ qui permettent, par approximations successives, de dégager le comportement de ϱ et α.

Cependant, il n'est pas clair *a priori* que l'on puisse utiliser les estimations de $f_z(\varrho,\alpha)$ et $f_s(\varrho,\alpha)$ énoncées au Lemme 11 puisque celles-ci ne sont valables que sous la condition $\alpha \ll 1$. Nous consacrons donc notre premier lemme à la démonstration de ce résultat lorsque $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$.

Rappelons que la fonction φ, définie par (3·27) réalise une bijection décroissante de $]1,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ dont la réciproque est notée ψ. Le comportement asymptotique de ces applications est décrit dans l'introduction par les estimations (3·28) et (3·29).

Lemme 12. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \geqslant 3$ et $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, on a $\alpha \ll_\varepsilon 1$.*

Démonstration. Supposons que $\alpha = \psi(\varepsilon/2)$. D'après la Proposition 4, on a $\log \varrho \gg \log_2 x$. Par conséquent, les estimations (4·32) et (4·34) impliquent

$$\log x = -f_s(\varrho, \alpha) = \frac{\varrho^{1/\alpha}}{S(\alpha)}\left\{1 + O_\varepsilon\left(\mathrm{e}^{-(c_8/2)(\log_2 x)^{4/7}}\right)\right\}$$

et

$$k = \varrho f_z(\varrho, \alpha) = \frac{\alpha \varrho^{1/\alpha}}{S(\alpha)\log \varrho}\left\{1 + \frac{a_\alpha}{\log \varrho} + O_\varepsilon\left(\frac{1}{(\log_2 x)^2}\right)\right\}.$$

En éliminant $\varrho^{1/\alpha}$ entre ces deux formules, il suit

$$\begin{aligned} k &= \frac{\log x}{\log\left(S(\alpha)\log x\right)}\left\{1 + \frac{a_\alpha}{\alpha \log\left(S(\alpha)\log x\right)} + O_\varepsilon\left(\frac{1}{(\log_2 x)^2}\right)\right\} \\ &= \frac{\log x}{\log_2 x}\left\{1 - \frac{\log S(\alpha)}{\log_2 x} + O_\varepsilon\left(\frac{1}{(\log_2 x)^2}\right)\right\}\left\{1 + \frac{a_\alpha}{\alpha \log\left(S(\alpha)\log x\right)} + O_\varepsilon\left(\frac{1}{(\log_2 x)^2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

En développant le produit ci-dessus et en tenant compte de la définition de φ, nous obtenons

$$\begin{aligned} k &= \frac{\log x}{\log_2 x}\left\{1 + \frac{1-\varphi(\alpha)}{\log_2 x} + O_\varepsilon\left(\frac{1}{(\log_2 x)^2}\right)\right\} \\ &= \frac{\log x}{\log_2 x}\left\{1 + \frac{1-\varepsilon/2}{\log_2 x} + O_\varepsilon\left(\frac{1}{(\log_2 x)^2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Pour x assez grand, nous obtenons donc, lorsque $\alpha = \psi(\varepsilon/2)$, l'inégalité $k > K_{x,\varepsilon}$. La fonction α étant croissante par rapport à k, nous en déduisons que, pour x assez grand et $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, on a $\alpha \leqslant \psi(\varepsilon/2)$. Notre résultat en découle immédiatement. □

On peut maintenant démontrer la Proposition 5. Nous commençons cette démonstration en « traduisant » le système (3·8) à l'aide des estimations fournies par le Lemme 11. Nous obtenons ainsi deux relations vérifiées par α et ϱ. En éliminant ϱ entre ces deux formules, nous aboutissons alors à une estimation implicite de α. Partant des premières estimations de α déduites de la Proposition 4 et du Lemme 12, cette identité permet d'en déduire une estimation plus fine de α. En itérant ce processus, nous aboutissons à l'estimation de α recherchée. Celle de ϱ en découle.

La Proposition 4 implique que, pour $k \geqslant K_x \mathrm{e}^{-c_6(\log_2 x)^{4/7}}$, on a $\log \varrho^{1/\alpha} \geqslant \frac{1}{2}\log_2 x$ et $\alpha - 1 \geqslant \mathrm{e}^{-2c_6(\log_2 x)^{4/7}}$. Choisissons c_6 telle que $4c_6 > c_8$. Dans ces conditions, (4·31) et (4·34) impliquent

$$k = \frac{\alpha \varrho^{1/\alpha}}{(\alpha-1)\log \varrho} G\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\log \varrho\right)\left\{1 + O\left(\frac{\alpha-1}{G\left((\alpha-1)\log \varrho^{1/\alpha}\right)}\right)\right\} \tag{4·42}$$

et

$$\log x = \frac{\varrho^{1/\alpha}}{S(\alpha)}\left\{1 + O\left(\mathrm{e}^{-(c_8/2)(\log_2 x)^{4/7}}\right)\right\} = \frac{\varrho^{1/\alpha}}{\alpha - 1}\{1 + O(\alpha - 1)\}. \tag{4·43}$$

En passant aux logarithmes dans cette dernière formule, il vient

$$\frac{\log \varrho}{\alpha} = (\log_2 x)\left\{1 + O\left(\frac{\log\left(\alpha/(\alpha-1)\right)}{\log_2 x}\right)\right\} \tag{4·44}$$

car $S(\alpha) \asymp (\alpha - 1)/\alpha$.

Commençons par établir (4·18). En reportant (4·43) et (4·44) dans (4·42), nous obtenons

$$k = \frac{\log x}{\log_2 x} G\Big(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \log \varrho\Big)\Big\{1 + O\Big(\frac{\alpha - 1}{G\big((\alpha - 1)\log \varrho^{1/\alpha}\big)} + \frac{\log\big(\alpha/(\alpha - 1)\big)}{\log_2 x}\Big)\Big\}.$$

Or, d'après (3·2), on a $w = (\log x)/(k \log_2 x)\{1 + (1/\log_2 x)\}$, donc

$$\frac{1}{w} = G\Big(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \log \varrho\Big)\Big\{1 + O\Big(\frac{\alpha - 1}{G\big((\alpha - 1)\log \varrho^{1/\alpha}\big)} + \frac{\log\big(\alpha/(\alpha - 1)\big)}{\log_2 x}\Big)\Big\}. \tag{4·45}$$

Nous allons déduire de cette formule l'estimation de α annoncée. La technique est standard. Nous introduisons une estimation grossière de α (fournie ici par la Proposition 4) dans (4·45). Il en découle une estimation plus précise de α. Il suffit alors d'itérer le processus jusqu'à l'obtention d'une estimation de α avec la précision voulue.

Sur le domaine (4·14), la Proposition 4 implique que $G\big((\alpha - 1)\log \varrho^{1/\alpha}\big) \sim 1/w$. Lorsque $k \geqslant c_5(\log x)/(\log_2 x)$, la même Proposition montre que $G\big((\alpha - 1)\log \varrho^{1/\alpha}\big) \gg 1$ et $\log(\alpha/(\alpha - 1)) \ll \log_3 x$. Dans ces conditions, nous déduisons de (4·45) que, dans le domaine $c_5(\log x)/(\log_2 x) \leqslant k \leqslant \big(1 - 1/(\log_2 x)^{1/3}\big)K_x$, on a $\alpha - 1 \ll 1/(\log_2 x)^{2/3}$ et donc, d'après (4·45), que $G\big((\alpha - 1)\log \varrho^{1/\alpha}\big) \sim 1/w$. Ainsi, sur l'ensemble du domaine (4·17), on a $G\big((\alpha - 1)\log \varrho^{1/\alpha}\big) \sim 1/w$. Il découle donc de (4·45) que

$$G\Big(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \log \varrho\Big) = \frac{1}{w}\Big\{1 + O\Big(w(\alpha - 1) + \frac{\log\big(\alpha/(\alpha - 1)\big)}{\log_2 x}\Big)\Big\}. \tag{4·46}$$

Le théorème des fonctions implicites fournit $H'(t)/H(t) \asymp 1/\big(t(t-1)\big)$ uniformément pour $0 < t < 1$, donc

$$H\big(w + \varepsilon(x)w\big) = H(w)\big\{1 + O\big(\varepsilon(x)/(w - 1)\big)\big\} \qquad \big(\varepsilon(x) = o(1),\ x \to +\infty\big). \tag{4·47}$$

Puisque $G\big((\alpha - 1)\log \varrho^{1/\alpha}\big) \sim 1/w$ sur le domaine (4·17), le terme dans le O de (4·46) tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. En appliquant la fonction H au deux membres de la formule (4·46) et en utilisant (4·47), nous obtenons

$$(\alpha - 1)\log \varrho^{1/\alpha} = \frac{1}{H(w)}\Big\{1 + O\Big(\frac{w^2(\alpha - 1)}{w - 1} + \frac{w \log\big(\alpha/(\alpha - 1)\big)}{(w - 1)\log_2 x}\Big)\Big\}.$$

D'après (4·44), il s'ensuit que

$$\alpha - 1 = \frac{1}{H(w)\log_2 x}\Big\{1 + O\Big(\frac{w^2(\alpha - 1)}{w - 1} + \frac{w \log\big(\alpha/(\alpha - 1)\big)}{(w - 1)\log_2 x}\Big)\Big\}. \tag{4·48}$$

Sur le domaine (4·17), nous savons que $(w-1)/w \gg 1/(\log_2 x)^{1/3}$ et $\alpha - 1 \ll 1/(\log_2 x)^{2/3}$. Il en découle sans peine que le terme dans le O de (4·48) tend vers 0. La formule (4·48) et l'estimation $H(w) \asymp w \log w$ impliquent alors que $\alpha - 1 \asymp 1/(w \log w \log_2 x)$. En reportant cette dernière évaluation dans (4·48) et en tenant compte de la définition de κ, nous obtenons

$$\alpha - 1 = \frac{1}{H(w)\log_2 x}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\kappa \log w} + \frac{\log w + \log(1 + \kappa)}{\kappa}\Big)\Big\}.$$

L'estimation (4·18) découle alors immédiatement de cette formule après avoir remarqué que le terme d'erreur est bien de l'ordre de la quantité R_1 définie dans l'énoncé.

Pour estimer ϱ, nous écrivons $\varrho = \varrho^{1/\alpha}\varrho^{1-1/\alpha}$. D'une part, (4·18) et (4·43) impliquent que

$$\varrho^{1/\alpha} = \frac{\log x}{H(w)\log_2 x}\{1 + O(R_1)\}.$$

D'autre part, (4·18) et (4·44) fournissent

$$\varrho^{1-1/\alpha} = \exp\Big\{\frac{1}{H(w)} + O\Big(\frac{wR_1}{w-1}\Big)\Big\} = \mathrm{e}^{1/H(w)}\Big\{1 + O\Big(\frac{wR_1}{w-1}\Big)\Big\}.$$

En combinant les deux estimations précédentes, nous obtenons (4·19).

4.2.4. Démonstration de la Proposition 6

Nous adoptons la même démarche que dans la démonstration de la Proposition 5. Rappelons que, d'après le Lemme 12, on a $\alpha \ll 1$ pour $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$.

Dans les conditions (4·21), la Proposition 5 implique que $\log \varrho^{1/\alpha} \geqslant \frac{1}{2}\log_2 x$ et $\alpha - 1 \geqslant 1/\{H(2/c_7)\log_2 x\}$. D'après (4·32) et (4·34), nous avons

$$k = \varrho f_z(\varrho,\alpha) = \frac{\alpha\varrho^{1/\alpha}}{S(\alpha)\log\varrho}\Big\{1 + \frac{a_\alpha}{\log\varrho} + \frac{\pi^2 + 2a_\alpha^2}{(\log\varrho)^2} + O\Big(\frac{1}{\{(\alpha-1)\log_2 x\}^3}\Big)\Big\} \tag{4·49}$$

et

$$\log x = \frac{\varrho^{1/\alpha}}{S(\alpha)}\big\{1 + O\big(\mathrm{e}^{-(c_8/2)(\log_2 x)^{4/7}}\big)\big\}. \tag{4·50}$$

Commençons par démontrer (4·22). En éliminant $\varrho^{1/\alpha}$ entre les deux dernières formules, nous obtenons

$$\begin{aligned} k &= \frac{\log x}{\log_2 x + \log S(\alpha)}\Big\{1 + \frac{a_\alpha}{\alpha(\log_2 x + \log S(\alpha))} \\ &\qquad\qquad + \frac{\pi^2 + 2a_\alpha^2}{\alpha^2(\log_2 x + \log S(\alpha))^2} + O\Big(\frac{1}{\{(\alpha-1)\log_2 x\}^3}\Big)\Big\} \\ &= \frac{\log x}{\log_2 x}\Big\{1 + \frac{1-\varphi(\alpha)}{\log_2 x} + \frac{2a_\alpha^2 - 2\alpha a_\alpha \log S(\alpha)}{\alpha^2(\log_2 x)^2} \\ &\qquad\qquad + \frac{\big(\alpha\log S(\alpha)\big)^2 + \pi^2}{\alpha^2(\log_2 x)^2} + O\Big(\frac{1}{\{(\alpha-1)\log_2 x\}^3}\Big)\Big\}, \end{aligned}$$

où, rappelons-le, $\varphi(\alpha) := 1 - a_\alpha/\alpha + \log S(\alpha)$. Or, de la définition de w et de l'estimation (3·2) de K_x, il découle que

$$w = \frac{\log x}{k\log_2 x}\Big\{1 + \frac{1}{\log_2 x} + \frac{2}{(\log_2 x)^2} + O\Big(\frac{1}{(\log_2 x)^3}\Big)\Big\}.$$

Nous déduisons alors des deux estimations précédentes que

$$\frac{1}{w} = 1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\log_2 x} + \frac{D_\alpha}{(\log_2 x)^2} + O\Big(\frac{1}{\{(\alpha-1)\log_2 x\}^3}\Big),$$

où

$$D_\alpha := 2(a_\alpha/\alpha)^2 - 2(a_\alpha/\alpha)\log S(\alpha) - a_\alpha/\alpha + \big(\log S(\alpha)\big)^2 + \log S(\alpha) + \pi^2/\alpha^2 - 1.$$

Nous réécrivons alors D_α sous la forme

$$D_\alpha = 2\varphi(\alpha)^2 - \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{1}{S(\alpha)^2} - 1\Big)\log \kappa_1(\alpha),$$

de sorte que

$$\frac{1}{w} = 1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\log_2 x} + \frac{2\varphi(\alpha)^2 + (1/\alpha)\big(1 - 1/S(\alpha)^2\big)\log\kappa_1(\alpha)}{(\log_2 x)^2} + O\Big(\frac{1}{\{(\alpha-1)\log_2 x\}^3}\Big)\cdot \tag{4·51}$$

Nous avons vu que $\alpha - 1 \geqslant 1/\{H(2/c_7)\log_2 x\}$ sur le domaine (4·21). Quitte alors à choisir c_7 assez grande, nous pouvons supposer $(\alpha-1)\log_2 x$ plus grand que n'importe quelle constante donnée. Dans ces conditions, la formule (4·51) implique, puisque $\varphi(\alpha) \asymp 1/(\alpha-1)$ et $(1/\alpha)\big(1 - 1/S(\alpha)^2\big)\log\kappa_1(\alpha) \asymp \log\big(\alpha/(\alpha-1)\big)/(\alpha-1)$, que

$$\alpha - 1 \asymp \frac{w}{(w-1)\log_2 x}\cdot \tag{4·52}$$

En reportant cette estimation dans (4·51), nous obtenons

$$\varphi(\alpha) = (w-1)(\log_2 x)\{1 + O(w-1)\}.$$

Or $H(w) = (w-1)\{1 + O(w-1)\}$ pour $w \to 1$, donc

$$\varphi(\alpha) = \big(H(w)\log_2 x\big)\{1 + O(w-1)\}. \tag{4·53}$$

Uniformément pour $u = u(x) \gg 1$ et $\varepsilon = \varepsilon(x) = o(1)$, on a

$$\psi(u + \varepsilon u) - 1 = \big(\psi(u) - 1\big)\{1 + O(\varepsilon)\} \qquad (x \to +\infty). \tag{4·54}$$

Appliquons alors ψ aux deux membres de (4·53) et développons le membre de droite avec (4·54). Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}\alpha - 1 &= \psi\big(H(w)(\log_2 x)\{1 + O(w-1)\}\big) - 1\\ &= \Big(\psi\big(H(w)(\log_2 x)\big) - 1\Big)\{1 + O(w-1)\},\end{aligned}$$

ce qui donne, compte tenu de la notation $\beta := \psi\big(H(w)\log_2 x\big)$,

$$\alpha - 1 = (\beta - 1)\{1 + O(w-1)\}. \tag{4·55}$$

Comme nous le verrons dans la suite de cette démonstration, l'estimation précédente n'est pas assez précise pour en déduire (4·23). Nous allons donc déterminer plus finement le comportement de α. Pour cela, nous réintroduisons (4·52), (4·53) et (4·55) dans (4·51). Il vient

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\log_2 x} = (w-1) + (w-1)^2 + \frac{\big(S(\beta)^2 - 1\big)\log\kappa_1(\beta)}{\beta S(\beta)^2(\log_2 x)^2} + O\big((w-1)^3\big).$$

car, pour $\varepsilon = \varepsilon(x) = o_{x\to\infty}(\beta - 1)$,

$$\frac{\big(S(\beta+\varepsilon)^2 - 1\big)\log\kappa_1(\beta+\varepsilon)}{(\beta+\varepsilon)S(\beta+\varepsilon)^2} = \frac{\big(S(\beta)^2-1\big)\log\kappa_1(\beta)}{\beta S(\beta)^2}\Big\{1 + O\Big(\frac{\varepsilon}{\beta-1}\Big)\Big\}.$$

Or $H(w) = (w-1) + (w-1)^2 + O_{w\to 1}\big((w-1)^3\big)$, donc

$$\varphi(\alpha) = H(w)\log_2 x + \frac{\big(S(\beta)^2-1\big)\log\kappa_1(\beta)}{\beta S(\beta)^2\log_2 x} + O\big((w-1)^3\log_2 x\big). \tag{4·56}$$

Uniformément pour $u = u(x) \gg 1$ et $\varepsilon = \varepsilon(x) = o(1)$, on a

$$\psi(u + \varepsilon u) - 1 = \big(\psi(u) - 1 + \varepsilon\psi'(u)\big)\{1 + O(\varepsilon^2)\} \qquad (x \to +\infty). \tag{4·57}$$

Appliquons alors ψ aux deux membres de (4·56) et développons le membre de droite à l'aide de (4·57). Nous obtenons

$$\alpha - 1 = \bigg(\beta - 1 + \frac{\big(S(\beta)^2-1\big)\big(\log\kappa_1(\beta)\big)\psi'\big(H(w)\log_2 x\big)}{\beta S(\beta)^2\log_2 x}\bigg)\big\{1 + O\big((w-1)^2\big)\big\}.$$

On vérifie sans peine que $\psi'(t) = \psi(t)S\big(\psi(t)\big)^2/\big(S(\psi(t))^2 - 1\big)$, ce qui permet de transformer l'expression précédente en

$$\alpha - 1 = \bigg(\beta - 1 + \frac{\log\kappa_1(\beta)}{\log_2 x}\bigg)\big\{1 + O\big((w-1)^2\big)\big\}.$$

Nous avons donc obtenu (4·22).

Il est possible de déduire de (4·22) une amélioration du terme d'erreur de (4·55). En effet, comme $\log\big(1/\kappa_1(\beta)\big) \asymp (\beta-1)\log\big(\beta/(\beta-1)\big) \asymp (\beta-1)\log(1+\kappa)$, il découle de (4·22) que

$$\alpha - 1 = (\beta - 1)\{1 + O(R_2)\},$$

où

$$R_2 := (w-1)^2 + \frac{\log(1+\kappa)}{\log_2 x}\cdot$$

L'estimation (4·24) est donc établie.

Pour estimer ϱ, nous écrivons $\varrho = \varrho^{1/\alpha}\varrho^{1-1/\alpha}$. En vertu de (4·50) et de l'estimation

$$S(\alpha) = S(\beta)\{1 + O(w-1)\}, \tag{4·58}$$

déduite de (4·22) et du développement $S\big(\beta + \varepsilon(x)(\beta-1)\big) = S(\beta)\big\{1 + O\big(\varepsilon(x)\big)\big\}$ valide pour $\varepsilon(x) = o_{x\to\infty}(1)$, nous avons

$$\varrho^{1/\alpha} = S(\beta)(\log x)\{1 + O(w-1)\}.$$

D'autre part, en passant aux logarithmes dans (4·50) et en utilisant (4·58), il vient

$$\log\varrho^{1/\alpha} = \big(\log_2 x + \log S(\beta)\big)\Big\{1 + O\Big(\frac{w-1}{\log_2 x}\Big)\Big\}. \tag{4·59}$$

Cette formule et (4·22) fournissent alors

$$\begin{aligned}\varrho^{1-1/\alpha} &= \exp\Big\{\Big(\beta-1+\frac{\log\kappa_1(\beta)}{\log_2 x}\Big)\big(\log_2 x+\log S(\beta)\big)\Big\}\big\{1+O\big((w-1)^2\big)\big\}\Big\}\\ &= \exp\big\{(\beta-1)\log_2 x+\log\kappa_1(\beta)+(\beta-1)\log S(\beta)\big\}\{1+O(w-1)\}.\end{aligned}$$

En combinant les estimations de $\varrho^{1/\alpha}$ et $\varrho^{1-1/\alpha}$ ci-dessus, nous obtenons (4·23).

4.2.5. Démonstration de la Proposition 7

Il découle de (3·22) que, pour $k\leqslant c_5(\log x)/\log_2 x$,

$$\frac{H(w)}{w}=(\log w)\Big\{1+O\Big(\frac{\log_2 w}{\log w}\Big)\Big\}=L_0\Big\{1+O\Big(\frac{\log L_0}{L_0}\Big)\Big\}. \tag{4·60}$$

Par ailleurs, (3·29) implique que, pour $1\leqslant k\leqslant K_{x,\varepsilon}$,

$$\beta-1=\frac{1}{H(w)\log_2 x}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{w\log_2 x}+\frac{\log(1+\kappa)}{w(\log w)\log_2 x}\Big)\Big\}. \tag{4·61}$$

Les estimations (4·15), (4·18) et (4·24) impliquent donc

$$\begin{aligned}&\alpha-1=(\beta-1)\Big\{1+O\Big(\frac{\log_2 w}{\log w}\Big)\Big\} && \text{pour } k\leqslant c_5\frac{\log x}{\log_2 x},\\ &\alpha-1=(\beta-1)\{1+O(R_1)\} && \text{pour } \mathrm{e}^{-c_6(\log_2 x)^{4/7}}K_x\leqslant k\leqslant\Big(1-\frac{1}{(\log_2 x)^{1/3}}\Big)K_x,\\ &\alpha-1=(\beta-1)\{1+O(R_2)\} && \text{pour } c_7\frac{\log x}{\log_2 x}\leqslant k\leqslant K_{x,\varepsilon}.\end{aligned}$$

Nous utilisons la première de ces trois formules lorsque $\log w\gg\sqrt{(\log_2 x)\log_3 x}$; la deuxième pour $\log w\ll\sqrt{(\log_2 x)\log_3 x}$ et $w-1\gg(\log_2 x)^{-1/4}$; et la dernière quand $w-1\ll(\log_2 x)^{-1/4}$. Il en résulte que, pour $1\leqslant k\leqslant K_{x,\varepsilon}$,

$$\alpha-1=(\beta-1)\{1+O(\mathcal{R})\}$$

où $\mathcal{R}:=\min\big\{\big(\log_2(2+w)\big)/\log(2+w)\,;\,R_1\,;\,R_2\big\}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{R}=\min\Big\{\frac{\log_2(2+w)}{\log w}\,;\,\frac{\log w}{\log_2 x}+\frac{\log(1+\kappa)}{\kappa}+\frac{\log_2 x}{\kappa^2}\,;\,\frac{\kappa^2}{(\log_2 x)^2}+\frac{\log(1+\kappa)}{\log_2 x}\Big\}.$$

Le maximum de $\mathcal{R}$ est obtenu pour k tel que $\log w\asymp\sqrt{(\log_2 x)\log_3 x}$ et l'on a alors $\mathcal{R}\ll\sqrt{(\log_3 x)/\log_2 x}$.

En vertu de (4·61) et de l'estimation (3·34), nous avons

$$\kappa_1(\beta)=1+O\Big(\frac{1}{w\log_2 x}+\frac{\log(1+\kappa)}{w(\log w)\log_2 x}\Big). \tag{4·62}$$

La formule (4·61) implique également

$$\begin{aligned}S(\beta)^\beta &=(\beta-1)\big\{1+O\big((\beta-1)\log(\beta/(\beta-1))\big)\big\}\\ &=\frac{1}{H(w)\log_2 x}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{w\log_2 x}+\frac{\log(1+\kappa)}{w(\log w)\log_2 x}\Big)\Big\}\end{aligned} \tag{4·63}$$

et

$$(\log x)^\beta = (\log x)\mathrm{e}^{1/H(w)}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{w\log_2 x}+\frac{\log(1+\kappa)}{w(\log w)\log_2 x}\Big)\Big\}. \tag{4·64}$$

Il découle donc de (4·19), (4·62), (4·63) et (4·64) que, pour k vérifiant (4·17),

$$\varrho = \kappa_1(\beta)\big(S(\beta)\log x\big)^\beta\Big\{1+O\Big(\frac{wR_1}{w-1}\Big)\Big\}. \tag{4·65}$$

Par ailleurs, pour $k \leqslant c_5(\log x)/\log_2 x$, nous déduisons de (4·60), (4·63) et (4·64) que

$$S(\beta)^\beta = \frac{k}{L_0\log x}\Big\{1+O\Big(\frac{\log L_0}{L_0}\Big)\Big\}$$

et

$$(\log x)^\beta = (\log x)\Big\{1+O\Big(\frac{\log L_0}{L_0}\Big)\Big\}.$$

L'estimation (4·16) peut donc encore s'écrire, pour $k \leqslant c_5(\log x)/\log_2 x$,

$$\varrho = \kappa_1(\beta)\big(S(\beta)\log x\big)^\beta\Big\{1+O\Big(\frac{\log L_0}{L_0}\Big)\Big\}. \tag{4·66}$$

Nous utilisons la formule (4·66) lorsque $\log w \gg \sqrt{(\log_2 x)\log_3 x}$; l'estimation (4·65) pour $\log w \ll \sqrt{(\log_2 x)\log_3 x}$ et $w-1 \gg (\log_2 x)^{-1/4}$; et (4·23) quand $w-1 \gg (\log_2 x)^{-1/4}$. Il en résulte que, pour $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$,

$$\varrho = \kappa_1(\beta)\big(S(\beta)\log x\big)^\beta\{1+O(\mathcal{E})\}$$

avec $\mathcal{E} := \min\big\{\big(\log_2(2+w)\big)/\log(2+w)\,;\, wR_1/(w-1)\,;\, w-1\big\}$ c'est-à-dire

$$\mathcal{E} = \min\Big\{\frac{\log_2(2+w)}{\log(2+w)}\,;\,\frac{\log w}{\kappa}+\frac{\log(1+\kappa)\log_2 x}{\kappa^2}+\frac{(\log_2 x)^2}{\kappa^3}\,;\,\frac{\kappa}{\log_2 x}\Big\}.$$

Le maximum de $\mathcal{E}$ est obtenu pour $\kappa \asymp (\log_2 x)^{3/4}$ et dans ce cas $\mathcal{E} \asymp (\log_2 x)^{-1/4}$. □

4.3. Estimation du hessien

Posons

$$\delta_{\vartheta\vartheta} := k+\varrho^2 f_{zz}(\varrho,\alpha), \qquad \delta_{\tau\tau} := f_{ss}(\varrho,\alpha) \qquad \text{et} \qquad \delta_{\vartheta\tau} := \varrho f_{zs}(\varrho,\alpha). \tag{4·67}$$

Les quantités $\delta_{\vartheta\vartheta}$, $\delta_{\tau\tau}$ et $\delta_{\vartheta\tau}$ désignent les dérivées partielles secondes de $g : (\vartheta,\tau) \longmapsto f(\varrho\,\mathrm{e}^{i\vartheta},\alpha+i\tau)$ calculées au point $(0,0)$. Autrement dit, la matrice hessienne de g en $(0,0)$ est donnée par

$$\mathrm{Hess}_{(0,0)}(g) = \begin{pmatrix}\delta_{\vartheta\vartheta} & \delta_{\vartheta\tau}\\ \delta_{\vartheta\tau} & \delta_{\tau\tau}\end{pmatrix}.$$

Nous considérons alors δ, le hessien de g en $(0,0)$, défini par

$$\delta := \mathrm{dét}\,\big(\mathrm{Hess}_{(0,0)}(g)\big) = \delta_{\vartheta\vartheta}\delta_{\tau\tau}-(\delta_{\vartheta\tau})^2.$$

Nous consacrons la proposition suivante à l'estimation de $\delta_{\vartheta\vartheta}$, $\delta_{\tau\tau}$, $\delta_{\vartheta\tau}$ et δ. Nous utilisons pour cela les évaluations des dérivées partielles de f établies dans le Lemme 11 ainsi que les estimations de α et ϱ obtenues dans les Propositions 4, 5, 6 et 7.

Rappelons que la dérivée H' de la fonction H vérifie l'équation différentielle

$$H'(w) = \frac{H(w)^2}{w\big(H(w)+1-w\big)} \tag{4·68}$$

et que le comportement de H et H' a été décrit dans l'introduction. Rappelons encore que $\mathcal{E}$ a été défini par

$$\mathcal{E} := \min\Big\{\frac{\log_2(2+w)}{\log(2+w)}\,;\,\frac{\log w}{\kappa}+\frac{\log(1+\kappa)\log_2 x}{\kappa^2}+\frac{(\log_2 x)^2}{\kappa^3}\,;\,\frac{\kappa}{\log_2 x}\Big\}$$

et que l'on a $\mathcal{E} \ll (\log_2 x)^{-1/4}$.

Proposition 8. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour x assez grand et $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, on a*

$$\delta_{\vartheta\vartheta} = \frac{k}{\beta}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log_2 x)^{1/2}}\Big)\Big\}, \tag{4·69}$$

$$\delta_{\vartheta\tau} = -\frac{\log x}{\beta}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log_2 x}\Big)\Big\}, \tag{4·70}$$

$$\delta_{\tau\tau} = \frac{(\log x)\log_2 x}{\beta}\big(1 + H(w)\big)\Big\{1 + O\Big(\frac{(\log_3 x)^{1/2}}{(\log_2 x)^{1/2}}\Big)\Big\} \tag{4·71}$$

et

$$\delta = \frac{1 - S(\beta)^2}{\beta^2 S(\beta)^2}\frac{k^2}{H'(w)}\{1 + O(\mathcal{E})\}. \tag{4·72}$$

En particulier, on a

$$\delta \asymp \frac{(w-1)(\log w)}{w}(\log x)^2.$$

Démonstration. Pour chacune des estimations de $\delta_{\vartheta\vartheta}$, $\delta_{\vartheta\tau}$ et $\delta_{\tau\tau}$, nous distinguons les « petites » et les « grandes » valeurs de k.

Commençons par estimer $\delta_{\vartheta\vartheta}$.

Il découle de (4·37) et de la Proposition 7 que

$$\begin{aligned}\delta_{\vartheta\vartheta} = k + \varrho^2 f_{zz}(\varrho,\alpha) &= k\Big\{1 + O\Big(\frac{\varrho^{1/\alpha}}{k\log(\varrho+2)}\Big)\Big\}\\ &= k\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log w)\log(2 + k/\log w)}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Or, d'après la Proposition 7, on a

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + O(\alpha - 1) = 1 + O\Big(\frac{1}{w(\log w)\log_2 x}\Big) \tag{4·73}$$

donc

$$\delta_{\vartheta\vartheta} = \frac{k}{\alpha}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log w)\log(2 + k/\log w)}\Big)\Big\}. \tag{4·74}$$

L'estimation précédente ne fournit pas d'équivalent asymptotique lorsque k devient « trop grand ». Nous allons donc établir une estimation de $\delta_{\vartheta\vartheta}$ valable pour $w - 1 \ll 1/(\log_3 x)$. Sous cette condition, nous avons $\alpha - 1 \asymp 1/\big((w-1)\log_2 x\big)$ d'après (4·52). Utilisons les estimations (4·32) et (4·33) de $f_z(\varrho,\alpha)$ et $f_{zz}(\varrho,\alpha)$ pour calculer $\delta_{\vartheta\vartheta} = \varrho f_z(\varrho,\alpha) + \varrho^2 f_{zz}(\varrho,\alpha)$. Nous obtenons ainsi

$$\delta_{\vartheta\vartheta} = \frac{\varrho^{1/\alpha}}{S(\alpha)\log\varrho}\Big\{1 + \frac{a_\alpha - \alpha}{\log\varrho} + \frac{\pi^2 + 2a_\alpha^2 - 2\alpha a_\alpha}{(\log\varrho)^2} + O\big((w-1)^3\big)\Big\}. \tag{4·75}$$

Cette estimation nous servira pour évaluer δ. Pour l'instant, remarquons qu'elle implique

$$\delta_{\vartheta\vartheta} = \frac{\varrho^{1/\alpha}}{S(\alpha)\log\varrho}\{1 + O(w-1)\}.$$

Associée à (4·50) et (4·59), cette formule implique

$$\delta_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{\alpha}\frac{\log x}{\log_2 x}\{1 + O(w-1)\} = \frac{k}{\alpha}\{1 + O(w-1)\}. \tag{4·76}$$

En utilisant (4·74) pour $w-1 \gg 1/\sqrt{\log_2 x}$ et (4·76) dans le cas contraire, nous obtenons, uniformément pour $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$,

$$\delta_{\vartheta\vartheta} = \frac{k}{\alpha}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\Big)\Big\}. \tag{4·77}$$

Par ailleurs il découle de (4·26) que l'on a, uniformément pour $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$,

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta}\Big\{1 + O\Big(\frac{\mathcal{R}}{w(\log w)\log_2 x}\Big)\Big\} = \frac{1}{\beta}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log_2 x}\Big)\Big\}. \tag{4·78}$$

La formule (4·69) est alors une conséquence de (4·77) et (4·78).

Pour estimer $\delta_{\vartheta\tau}$, nous distinguons à nouveau les « petites » et les « grandes » valeurs de k.

Supposons d'abord que $k \leqslant \sqrt{\log x}$. Hildebrand et Tenenbaum ont démontré dans le Lemme 1 de [19] que

$$f_{zs}(r,\sigma) = -\frac{1}{\sigma - 1} + O\big(\log(r+2)\big) \qquad (r > 0,\ 1 < \sigma \ll 1).$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\delta_{\vartheta\tau} = \varrho f_{zs}(\varrho,\alpha) &= -\frac{\varrho}{\alpha - 1}\big\{1 + O\big((\alpha-1)\log(\varrho+2)\big)\big\}\\ &= -\frac{\varrho}{\alpha-1}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)\Big\},\end{aligned}$$

car $(\alpha-1)\log(\varrho+2) \ll 1/\sqrt{\log x}$ pour $k \leqslant \sqrt{\log x}$. La formule (4·15) fournit alors

$$\delta_{\vartheta\tau} = -(\log x)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)\Big\}$$

dont il découle, d'après (4·73),

$$\delta_{\vartheta\tau} = -\frac{\log x}{\alpha}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)\Big\}. \tag{4·79}$$

Pour $k \geqslant \sqrt{\log x}$, (4·36) fournit

$$\delta_{\vartheta\tau} = \varrho f_{zs}(\varrho,\alpha) = -\frac{\varrho^{1/\alpha}}{\alpha S(\alpha)}\big\{1 + O\big(\mathrm{e}^{-(c_8/2)(\log_2 x)^{4/7}}\big)\big\}.$$

D'après (4·43), il s'ensuit que

$$\delta_{\vartheta\tau} = -\frac{\log x}{\alpha}\big\{1 + O\big(\mathrm{e}^{-(c_8/2)(\log_2 x)^{4/7}}\big)\big\}. \tag{4·80}$$

Nous avons donc démontré que sur l'ensemble du domaine $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, nous avons

$$\delta_{\vartheta\tau} = -\frac{\log x}{\alpha}\big\{1 + O\big(\mathrm{e}^{-(c_8/2)(\log_2 x)^{4/7}}\big)\big\}. \tag{4·81}$$

Combinée à (4·78), cette formule fournit bien (4·70).

Estimons maintenant $\delta_{\tau\tau}$.

Commençons cette fois par les grandes valeurs de k. Pour $k \geqslant \sqrt{\log x}$, l'estimation (4·35) donne

$$\delta_{\tau\tau} = f_{ss}(\varrho, \alpha) = \frac{\varrho^{1/\alpha} \log \varrho}{\alpha^2 S(\alpha)} \Big(1 + \frac{\alpha - a_\alpha}{\log \varrho}\Big) \big\{1 + O\big(\mathrm{e}^{-(c_8/2)(\log_2 x)^{4/7}}\big)\big\}.$$

Associée à (4·43), la formule précédente fournit

$$\delta_{\tau\tau} = \frac{(\log x) \log \varrho}{\alpha^2} \Big(1 + \frac{1 - a_\alpha/\alpha}{\log_2 x}\Big) \big\{1 + O\big(\mathrm{e}^{-(c_8/2)(\log_2 x)^{4/7}}\big)\big\}. \tag{4·82}$$

D'après (4·44), il s'ensuit que

$$\delta_{\tau\tau} = \frac{(\log x) \log_2 x}{\alpha} \Big(1 + \frac{\log S(\alpha)}{\log_2 x}\Big) \Big(1 + \frac{1 - a_\alpha/\alpha}{\log_2 x}\Big) \big\{1 + O\big(\mathrm{e}^{-(c_8/2)(\log_2 x)^{4/7}}\big)\big\}$$

et donc, puisque $\varphi(\alpha) := 1 - a_\alpha/\alpha + \log S(\alpha)$,

$$\delta_{\tau\tau} = \frac{(\log x) \log_2 x}{\alpha} \Big(1 + \frac{\varphi(\alpha)}{\log_2 x}\Big) \big\{1 + O\big(\mathrm{e}^{-(c_8/2)(\log_2 x)^{4/7}}\big)\big\}. \tag{4·83}$$

Supposons maintenant que $k \leqslant \sqrt{\log x}$. L'estimation de $f_{ss}(r, \sigma)$ obtenue par Hildebrand et Tenenbaum dans le Lemme 1 de [19] est

$$f_{ss}(r, \sigma) = \frac{r}{(\sigma - 1)^2} + O\big((r + 2)(\log(r + 2))^2\big) \qquad (r > 0,\ 1 < \sigma \ll 1).$$

Il découle de ceci et de la formule (4·15) que

$$\begin{aligned}\delta_{\tau\tau} = f_{ss}(\varrho, \alpha) &= \frac{\log x}{\alpha - 1} \big\{1 + O\big((\alpha - 1) \log(\varrho + 2)\big)\big\} \\ &= \frac{\log x}{\alpha - 1} \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

On vérifie sans peine que, pour $k \leqslant \sqrt{\log x}$, on a

$$1 + \frac{\varphi(\alpha)}{\log_2 x} = \frac{1}{(\alpha - 1) \log_2 x} \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)\Big\}.$$

Il s'ensuit donc que

$$\delta_{\tau\tau} = (\log x)(\log_2 x) \Big(1 + \frac{\varphi(\alpha)}{\log_2 x}\Big) \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)\Big\}$$

puis, d'après (4·73), que

$$\delta_{\tau\tau} = \frac{(\log x) \log_2 x}{\alpha} \Big(1 + \frac{\varphi(\alpha)}{\log_2 x}\Big) \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)\Big\}. \tag{4·84}$$

En associant (4·83) et (4·84), nous obtenons pour $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$,

$$\delta_{\tau\tau} = \frac{(\log x) \log_2 x}{\alpha} \Big(1 + \frac{\varphi(\alpha)}{\log_2 x}\Big) \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)\Big\}. \tag{4·85}$$

Or, d'après (4·26), on a

$$1 + \frac{\varphi(\alpha)}{\log_2 x} = \big(1 + H(w)\big) \Big\{1 + O\Big(\frac{(\log_3 x)^{1/2}}{(\log_2 x)^{1/2}}\Big)\Big\}.$$

Nous déduisons donc (4·71) des formules (4·85) et (4·78).

Passons à l'estimation de δ. Là encore, nous distinguons les « petites » et les « grandes » valeurs de k.

Supposons d'abord que $\kappa := \big((w-1)\log_2 x\big)/w$ tende vers $+\infty$ (ce sont les « petites » valeurs de k). D'après (4·74) et (4·85), nous avons

$$\delta_{\vartheta\vartheta}\delta_{\tau\tau} = \frac{k}{\alpha}\frac{(\log x)\log_2 x}{\alpha}\Big(1+\frac{\varphi(\alpha)}{\log_2 x}\Big)\Big\{1+O\Big(\frac{1}{(\log w)\log(2+k/\log w)}\Big)\Big\}.$$

Or

$$w = \frac{\log x}{k\log_2 x}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log_2 x}\Big)\Big\}$$

donc

$$\delta_{\vartheta\vartheta}\delta_{\tau\tau} = \frac{(\log x)^2}{\alpha^2}\Big(\frac{1}{w}+\frac{\varphi(\alpha)}{w\log_2 x}\Big)\Big\{1+O\Big(\frac{1}{(\log w)\log(2+k/\log w)}\Big)\Big\}.$$

Par ailleurs, (4·81) implique que

$$\delta_{\vartheta\tau}^2 = \frac{(\log x)^2}{\alpha^2}\big\{1+O\big(\mathrm{e}^{-(c_8/2)(\log_2 x)^{4/7}}\big)\big\}.$$

Comme $\delta := \delta_{\vartheta\vartheta}\delta_{\tau\tau} - \delta_{\vartheta\tau}^2$, il découle des deux précédentes formules

$$\delta = \frac{(\log x)^2}{\alpha^2}\Big(\frac{\varphi(\alpha)}{w\log_2 x}+\frac{1}{w}-1\Big)\Big\{1+O\Big(\frac{1}{(\log w)\log(2+k/\log w)}\Big)\Big\}.$$

Or, d'après (4·26), on a

$$\frac{\varphi(\alpha)}{w\log_2 x}+\frac{1}{w}-1 = \Big(\frac{H(w)}{w}+\frac{1}{w}-1\Big)\Big\{1+O\Big(\frac{w\mathcal{R}}{w-1}\Big)\Big\} \asymp (w-1)\log w,$$

où $\mathcal{R}$ a été défini par (4·28). Il s'ensuit donc, en tenant compte de l'égalité (4·68), que

$$\delta = \frac{(\log x)^2}{\alpha^2}\frac{H(w)^2}{w^2H'(w)}\Big\{1+O\Big(\frac{w\mathcal{R}}{w-1}\Big)\Big\}.$$

À l'aide de (4·78), nous en déduisons que

$$\delta = \frac{(\log x)^2}{\beta^2}\frac{H(w)^2}{w^2H'(w)}\Big\{1+O\Big(\frac{w\mathcal{R}}{w-1}\Big)\Big\}.$$

Or

$$\frac{1-S(\beta)^2}{S(\beta)^2} = H(w)^2(\log_2 x)^2\Big\{1+O\Big(\frac{w\mathcal{R}}{w-1}\Big)\Big\},$$

donc

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1-S(\beta)^2}{\beta^2S(\beta)^2}\frac{1}{H'(w)}\frac{(\log x)^2}{w^2(\log_2 x)^2}\Big\{1+O\Big(\frac{w\mathcal{R}}{w-1}\Big)\Big\}\\ &= \frac{1-S(\beta)^2}{\beta^2S(\beta)^2}\frac{k^2}{H'(w)}\Big\{1+O\Big(\frac{w\mathcal{R}}{w-1}\Big)\Big\}.\end{aligned} \tag{4·86}$$

Pour traiter les « grandes » valeurs de k, nous nous plaçons sous la condition $w-1 \ll 1/\log_3 x$. Les formules (4·75) et (4·82) impliquent alors que

$$\begin{aligned}\delta_{\vartheta\vartheta}\delta_{\tau\tau} &= \frac{\varrho^{1/\alpha}}{S(\alpha)\log\varrho}\Big\{1+\frac{a_\alpha-\alpha}{\log\varrho}+\frac{\pi^2+2a_\alpha^2-2\alpha a_\alpha}{(\log\varrho)^2}+O\big((w-1)^3\big)\Big\}\\ &\qquad\times\frac{\varrho^{1/\alpha}\log\varrho}{\alpha^2 S(\alpha)}\Big(1+\frac{\alpha-a_\alpha}{\log\varrho}\Big)\big\{1+O\big(\mathrm{e}^{-(c_8/2)(\log_2 x)^{4/7}}\big)\big\}\\ &= \Big(\frac{\varrho^{1/\alpha}}{\alpha S(\alpha)}\Big)^2\Big\{1+\frac{\pi^2+a_\alpha^2-\alpha^2}{(\log\varrho)^2}+O\big((w-1)^3\big)\Big\}.\end{aligned}$$

D'après (4·50), il s'ensuit

$$\delta_{\vartheta\vartheta}\delta_{\tau\tau} = \Big(\frac{\log x}{\alpha}\Big)^2\Big\{1+\frac{\pi^2+a_\alpha^2-\alpha^2}{(\log\varrho)^2}+O\big((w-1)^3\big)\Big\}.$$

Par ailleurs, d'après (4·81), on a

$$\delta_{\vartheta\tau}^2 = \frac{(\log x)^2}{\alpha^2}\big\{1+O\big((w-1)^3\big)\big\}.$$

Nous déduisons alors, des deux précédentes formules, que

$$\begin{aligned}\delta &= \Big(\frac{\log x}{\alpha}\Big)^2\Big\{\frac{\pi^2+a_\alpha^2-\alpha^2}{(\log\varrho)^2}+O\big((w-1)^3\big)\Big\}\\ &= \Big(\frac{\log x}{\alpha}\Big)^2\Big\{\frac{\pi^2+a_\alpha^2-\alpha^2}{\alpha^2(\log_2 x)^2}+O\big((w-1)^3\big)\Big\}.\end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté que

$$\frac{\pi^2+a_\alpha^2-\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{1-S(\alpha)^2}{S(\alpha)^2}$$

donc, puisque $\big(1-S(\alpha)^2\big)/\big(\varphi(\alpha)^2 S(\alpha)^2\big) \asymp 1$,

$$\delta = \frac{1-S(\alpha)^2}{\alpha^2 S(\alpha)^2\varphi(\alpha)^2}(\log x)^2\Big\{\frac{\varphi(\alpha)^2}{(\log_2 x)^2}+O\big((w-1)^3\big)\Big\}.$$

Or (4·53) et (4·22) impliquent respectivement que $\varphi(\alpha)/\log_2 x = (w-1)\{1+O(w-1)\}$ et

$$\begin{aligned}\frac{1-S(\alpha)^2}{\alpha^2 S(\alpha)^2\varphi(\alpha)^2} &= \frac{1-S(\beta)^2}{\beta^2 S(\beta)^2\varphi(\beta)^2}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log_2 x}\Big)\Big\}\\ &= \frac{1-S(\beta)^2}{\beta^2 S(\beta)^2 H(w)^2(\log_2 x)^2}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log_2 x}\Big)\Big\}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1-S(\beta)^2}{\beta^2 S(\beta)^2}\frac{(w-1)^2}{H(w)^2}\frac{(\log x)^2}{(\log_2 x)^2}\{1+O(w-1)\}\\ &= \frac{1-S(\beta)^2}{\beta^2 S(\beta)^2}\frac{k^2(w-1)^2}{H(w)^2}\{1+O(w-1)\}.\end{aligned}$$

Or $H(w)=(w-1)\{1+O_{w\to 1}(w-1)\}$, donc

$$\delta = \frac{1-S(\beta)^2}{\beta^2 S(\beta)^2}k^2\{1+O(w-1)\}.$$

De plus, $H'(w) = 1 + O_{w\to 1}(w-1)$, donc

$$\delta = \frac{1-S(\beta)^2}{\beta^2 S(\beta)^2}\frac{k^2}{H'(w)}\{1+O(w-1)\}. \tag{4·87}$$

En combinant (4·86) et (4·87), nous obtenons

$$\delta = \frac{1-S(\beta)^2}{\beta^2 S(\beta)^2}\frac{k^2}{H'(w)}\Big\{1+O\Big(\min\Big\{\frac{w\mathcal{R}}{w-1}\,;\,w-1\Big\}\Big)\Big\}.$$

Or

$$\min\Big\{\frac{w\mathcal{R}}{w-1}\,;\,w-1\Big\} \asymp \mathcal{E},$$

donc nous avons donc obtenu (4·72).

L'ordre de grandeur (3·39) de δ découle de (4·72) et des estimations

$$\frac{1-S(\beta)^2}{\beta^2 S(\beta)^2} \asymp \frac{1}{(\beta-1)^2} \asymp w^2(\log w)^2(\log_2 x)^2$$

et $H'(w) \asymp 1 + \log w$. □

5. Lemmes fondamentaux de la méthode du col

Les lemmes fondamentaux de la méthode du col que nous démontrons dans ce paragraphe reposent en partie sur des minorations de sommes sur les nombres premiers. Nous énonçons ces minorations dans le lemme suivant. Rappelons que G a été défini par (3·19).

Lemme 13. *On a, uniformément pour ϑ, $\tau \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant y^2 \leqslant z$ et $y \to \infty$*

$$\sum_{y<p\leqslant z}\frac{(\vartheta-\tau\log p)^2}{p} \gg \tau^2(\log z)^2 + \vartheta^2\log\Big(\frac{\log z}{\log y}\Big). \tag{5·1}$$

On a, uniformément pour $1 < \sigma \ll 1$ et $y \to \infty$,

$$\sum_{p>y}\frac{1}{p^\sigma} = \frac{y^{1-\sigma}G\big((\sigma-1)\log y\big)}{(\sigma-1)\log y} + O\Big(\frac{y^{1-\sigma}\mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}}{\sigma-1}\Big), \tag{5·2}$$

$$\sum_{p>y}\frac{\log p}{p^\sigma} = \frac{y^{1-\sigma}}{\sigma-1} + O\Big(\frac{y^{1-\sigma}\mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}}{\sigma-1}\Big), \tag{5·3}$$

$$\sum_{p>y}\frac{(\log p)^2}{p^\sigma} = \frac{y^{1-\sigma}\log y}{\sigma-1}\Big(1+\frac{1}{(\sigma-1)\log y}\Big) + O\Big(\frac{y^{1-\sigma}\mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}}{\sigma-1}\Big). \tag{5·4}$$

En particulier, il existe une constante $c_9 > 0$ telle qu'uniformément pour ϑ, $\tau \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant y^2 \leqslant z$, $1 + c_9/\log y < \sigma \ll 1$ et $y \to \infty$,

$$\sum_{y<p\leqslant z}\frac{(\vartheta-\tau\log p)^2}{p^\sigma} \gg \frac{y^{1-\sigma}}{(\sigma-1)^3\log y}\Big(\tau^2+\frac{\vartheta^2}{(\log y)^2}\Big). \tag{5·5}$$

Démonstration. Posons, pour $j = 0, 1, 2$,

$$M_j = \sum_{y<p\leqslant z} \frac{(\log p)^j}{p^\sigma}\cdot$$

On a

$$M_0\vartheta^2 - 2M_1\vartheta\tau + M_2\tau^2 = (M_0 - M_1^2/M_2)\vartheta^2 + (M_1\vartheta - M_2\tau)^2/M_2 \geqslant (M_0 - M_1^2/M_2)\vartheta^2$$

donc

$$\sum_{y<p\leqslant z} \frac{(\vartheta - \tau\log p)^2}{p^\sigma} \geqslant (M_0 - M_1^2/M_2)\vartheta^2. \tag{5·6}$$

De même, on démontre que

$$\sum_{y<p\leqslant z} \frac{(\vartheta - \tau\log p)^2}{p^\sigma} \geqslant (M_2 - M_1^2/M_0)\tau^2 \tag{5·7}$$

Les minorations (5·1) et (5·5) reposent sur ces inégalités.

Commençons par démontrer (5·1). En vertu des théorèmes de Mertens (et des estimations classiques sur les sommes de nombres premiers que l'on peut en déduire par sommation d'Abel), nous avons, pour $1 \leqslant y^2 \leqslant z$ et $y \to \infty$,

$$\begin{aligned} M_0 &= \log\Big(\frac{\log z}{\log y}\Big) + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big),\\ M_1 &= \log(z/y) + O(1),\\ M_2 &= (\log z)^2 - (\log y)^2 + O\big((\log y)^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}\big). \end{aligned}$$

En adoptant la notation $u := (\log z)/\log y$, il en découle que

$$\begin{aligned} M_0 - M_1^2/M_2 &= \log u - \frac{(u-1)^2}{u^2-1} + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\\ &\asymp \log u = \log\Big(\frac{\log z}{\log y}\Big)\cdot \end{aligned}$$

et, de manière similaire,

$$M_2 - M_1^2/M_0 \asymp (\log z)^2.$$

On obtient (5·1) en combinant ces estimations et les minorations (5·6) et (5·7) avec $\sigma = 1$.

Les formules (5·2), (5·3) et (5·4) découlent du théorème des nombres premiers et d'une sommation d'Abel. Nous avons

$$\sum_{p>y} \frac{1}{p^\sigma} = \int_y^\infty \frac{\mathrm{d}\pi(t)}{t^\sigma} = \int_y^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\sigma \log t} + O\Big(\frac{y^{1-\sigma}\mathrm{e}^{-\sqrt{\log y}}}{\sigma - 1}\Big)\cdot$$

En effectuant le changement de variable $u = (\sigma - 1)\log t$ et en tenant compte de la définition (3·19) de G, nous obtenons immédiatement (5·2). Nous omettons les démonstrations de (5·3) et (5·4) qui s'obtiennent de manière similaire (et même plus simple).

Voyons maintenant comment on peut en déduire (5·5). Pour $(\sigma-1)\log y > c_9$, on a, d'après (5·2), (5·3) et (5·4),

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{y^{1-\sigma}G\big((\sigma-1)\log y\big)}{(\sigma-1)\log y}\big\{1+O\big(y^{1-\sigma}+\mathrm{e}^{-\frac12\sqrt{\log y}}\big)\big\},\\ M_1 &= \frac{y^{1-\sigma}}{\sigma-1}\big\{1+O\big(y^{1-\sigma}+\mathrm{e}^{-\frac12\sqrt{\log y}}\big)\big\},\\ M_2 &= \frac{y^{1-\sigma}\log y}{\sigma-1}\Big(1+\frac{1}{(\sigma-1)\log y}\Big)\big\{1+O\big(y^{1-\sigma}+\mathrm{e}^{-\frac12\sqrt{\log y}}\big)\big\}. \end{aligned}$$

Or, d'après (3·20),

$$G\big((\sigma-1)\log y\big) = 1-\frac{1}{(\sigma-1)\log y}+\frac{2}{\{(\sigma-1)\log y\}^2}+O\Big(\frac{1}{\{(\sigma-1)\log y\}^3}\Big).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} M_0-\frac{M_1^2}{M_2} &= \frac{y^{1-\sigma}}{\{(\sigma-1)\log y\}^3}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{(\sigma-1)\log y}+\frac{\big((\sigma-1)\log y\big)^2}{\mathrm{e}^{\sqrt{\log y}}}\Big)\Big\}\\ &= \frac{y^{1-\sigma}}{\{(\sigma-1)\log y\}^3}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{(\sigma-1)\log y}\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Pour c_9 assez grande, on obtient donc

$$M_0-M_1^2/M_2 \asymp \frac{y^{1-\sigma}}{\{(\sigma-1)\log y\}^3}$$

On démontre de même que

$$M_2-M_1^2/M_0 \asymp \frac{y^{1-\sigma}}{(\sigma-1)^3\log y}$$

En reportant ces estimations dans (5·6) et (5·7), on obtient (5·5). □

Dans son principe, la méthode du col consiste à démontrer que la contribution principale à l'intégrale que l'on désire estimer (ici (3·14)) est fournie par un petit voisinage autour du point-selle. Nous avons donc besoin d'une estimation justifiant une décroissance « rapide » de la fonction intégrée « loin » du col. Nous donnons une telle estimation dans le lemme suivant.

Rappelons que

$$F(z,s)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^{\omega(n)}}{n^s}=\prod_p\Big(1+\frac{z}{p^s-1}\Big).$$

Lemme 14. *Soit $\varepsilon>0$. Pour x assez grand, $1\leqslant k\leqslant K_{x,\varepsilon}$, $|\vartheta|\leqslant\pi$, $|\tau|\leqslant(\log x)^{10}$, $\alpha=\alpha(k,x)$ et $\varrho=\varrho(k,x)$, on a*

$$\text{(5·8)}\qquad \Big|\frac{F(\varrho\,\mathrm{e}^{i\vartheta},\alpha+i\tau)}{F(\varrho,\alpha)}\Big| \ll \mathrm{e}^{-c_{10}k}+\Big(1+\frac{\tau^2}{(\alpha-1)^2}\Big)^{-c_{10}k\varrho/(k+\varrho)}\mathrm{e}^{-c_{10}k(w-1)^2\vartheta^2/w^2},$$

où $c_{10}>0$ désigne une constante absolue.

Démonstration. Posons $z = \varrho\,\mathrm{e}^{i\vartheta}$ et $s = \alpha + i\tau$. Pour tout nombre premier p, on a

$$\begin{aligned}\Big|1+\frac{z}{p^s-1}\Big|^2 &= 1 + 2\,\mathcal{R}\mathrm{e}\Big(\frac{z}{p^s-1}\Big) + \Big|\frac{z}{p^s-1}\Big|^2\\ &\leqslant 1 + 2\,\mathcal{R}\mathrm{e}\Big(\frac{z}{p^s}\Big) + \frac{2|z|}{|p^s(p^s-1)|} + \Big|\frac{z}{p^s-1}\Big|^2\\ &\leqslant 1 - \frac{2\varrho}{p^\alpha}\{1-\cos(\vartheta-\tau\log p)\} + \frac{2\varrho}{p^\alpha} + \frac{2\varrho}{p^\alpha(p^\alpha-1)} + \frac{\varrho^2}{(p^\alpha-1)^2}\cdot\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\Big|1+\frac{z}{p^s-1}\Big|^2 &\leqslant 1 - \frac{2\varrho}{p^\alpha}\{1-\cos(\vartheta-\tau\log p)\} + \frac{2\varrho}{p^\alpha-1} + \frac{\varrho^2}{(p^\alpha-1)^2}\\ &= \Big(1+\frac{\varrho}{p^\alpha-1}\Big)^2\bigg(1-\frac{2\varrho\{1-\cos(\vartheta-\tau\log p)\}}{p^\alpha\big(1+\varrho/(p^\alpha-1)\big)^2}\bigg)\cdot\end{aligned}$$

En effectuant le produit sur tous les nombres premiers, nous obtenons

$$\Big|\frac{F(\varrho\,\mathrm{e}^{i\vartheta},\alpha+i\tau)}{F(\varrho,\alpha)}\Big| \leqslant \prod_p \bigg(1-\frac{2\varrho\{1-\cos(\vartheta-\tau\log p)\}}{p^\alpha\big(1+\varrho/(p^\alpha-1)\big)^2}\bigg)^{1/2} \leqslant \exp\Big(-\frac{\varrho U}{4}\Big),$$

avec

$$U = U(\vartheta,\tau,Y) := \sum_{p>Y}\frac{1-\cos(\vartheta-\tau\log p)}{p^\alpha},$$

où Y est un paramètre réel arbitraire satisfaisant à $Y \geqslant (\varrho+1)^{1/\alpha}$.

Nous allons démontrer que

$$U \gg \min\Big\{\frac{k}{\varrho}\,;\,\frac{k}{k+\varrho}\log\Big(1+\frac{\tau^2}{(\alpha-1)^2}\Big)\Big\} \tag{5·9}$$

et

$$U \gg \frac{k}{\varrho}\Big(\frac{\vartheta}{1+(\alpha-1)\log\varrho^{1/\alpha}}\Big)^2\cdot \tag{5·10}$$

Le résultat souhaité découlera alors de ces estimations puisque

$$1+(\alpha-1)\log\varrho^{1/\alpha} \asymp \frac{w}{w-1},$$

d'après (4·30).

Lorsque $|\tau|$ est « petit », la somme U est dominée par ses premiers termes pour lesquels la phase $\vartheta - \tau\log p$ varie « peu ». On peut alors minorer U directement à partir de sa définition en se restreignant à ces premiers termes.

Au contraire, lorsque $|\tau|$ est « grand », la somme U n'est plus dominée par ses premiers termes et il est nécessaire de tenir compte de l'effet pondérateur du facteur $1-\cos(\vartheta - \tau\log p)$. La minoration de U s'avère alors plus technique. Elle repose sur une minoration que nous déduisons de la région sans zéro de la fonction ζ de Vinogradov-Korobov.

Commençons par établir la minoration de U qui nous servira dans le cas où $|\tau|$ est « grand ». Posons

$$U^*(\sigma) := \sum_{p>Y} \frac{\{1-\cos(\vartheta - \tau \log p)\} \log p}{p^\sigma} \qquad (\sigma > 1).$$

Nous pouvons écrire

$$U^*(\sigma) = \sum_{p>Y} \frac{\log p}{p^\sigma} - \mathcal{R}\mathrm{e}\Big(\mathrm{e}^{i\vartheta} \sum_{p>Y} \frac{\log p}{p^{\sigma+i\tau}}\Big) \geqslant \sum_{p>Y} \frac{\log p}{p^\sigma} - \Big| \sum_{p>Y} \frac{\log p}{p^{\sigma+i\tau}} \Big|. \tag{5·11}$$

En utilisant la région sans zéro de ζ de Vinogradov-Korobov, on établit par la méthode standard d'intégration complexe (cf. par exemple la formule (71) de la démonstration du Lemme III.5.9.1 de [24]) que pour $|\tau| \leqslant \exp\big\{(\log y)^{3/2-\varepsilon}\big\}$ et $\sigma > 1$, on a

$$\sum_{p>y} \frac{\log p}{p^{\sigma+i\tau}} = \frac{y^{1-\sigma-i\tau}}{\sigma + i\tau - 1} + O\big(y^{1-\sigma}\,\mathrm{e}^{-(\log y)^{\varepsilon/2}}\big). \tag{5·12}$$

Faisons l'hypothèse supplémentaire suivante sur Y :

$$\log Y \gg \log_2 x.$$

Alors $|\tau| \leqslant (\log x)^{10} \leqslant \exp\big\{(\log Y)^{3/2-\varepsilon}\big\}$. Nous pouvons donc utiliser (5·12) pour estimer les deux sommes du second membre de (5·11). Nous obtenons

$$U^*(\sigma) \geqslant \frac{Y^{1-\sigma}}{\sigma - 1} - \frac{Y^{1-\sigma}}{|\sigma + i\tau - 1|} + O\big(Y^{1-\sigma}\,\mathrm{e}^{-(\log_2 x)^{\varepsilon/2}}\big).$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} U &= \int_\alpha^\infty U^*(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \\ &\geqslant \int_\alpha^\infty \frac{Y^{1-\sigma}\,\mathrm{d}\sigma}{\sigma-1} - \int_\alpha^\infty \frac{Y^{1-\sigma}\,\mathrm{d}\sigma}{|\sigma+i\tau-1|} + O\Big(\mathrm{e}^{-(\log_2 x)^{\varepsilon/2}} \int_\alpha^\infty Y^{1-\sigma}\,\mathrm{d}\sigma\Big), \end{aligned}$$

ce qui donne, après le changement de variable $u = (\sigma - 1)\log Y$,

$$U \geqslant \Delta\big((\alpha-1)\log Y, |\tau|\log Y\big) + O\big(Y^{1-\alpha}\,\mathrm{e}^{-(\log_2 x)^{\varepsilon/2}}\big), \tag{5·13}$$

avec

$$\Delta(\lambda, a) := \int_\lambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u - \int_\lambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{(u^2+a^2)^{1/2}}\mathrm{d}u \qquad (\lambda > 0,\ a > 0).$$

Rappelons que l'inégalité (5·13) est valide sous la double condition

$$Y \geqslant (\varrho + 1)^{1/\alpha} \qquad \text{et} \qquad \log Y \gg \log_2 x.$$

Nous allons utiliser (5·13) pour démontrer les inégalités (5·9) et (5·10) lorsque $|\tau|$ est grand.

Nous établissons la minoration de U sur deux sous-domaines complémentaires du domaine $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$.

Dans cette première partie, nous démontrons (5·9) et (5·10) pour $w \geqslant w_1$ où $w_1 \in]1, +\infty[$ est une constante que nous choisirons assez proche de 1 dans la seconde partie de cette démonstration. Nous traitons ainsi les « petites » valeurs de k.

Nous commençons par démontrer (5·9) pour $w \geqslant w_1$. Nous distinguons deux cas selon la taille de $|\tau|$.

Considérons tout d'abord le cas où $w \geqslant w_1$ et $|\tau| \leqslant 2c_{11}(\alpha - 1)$. Posons

$$Y_1 := \exp\Big\{\frac{1}{2c_{11}(\alpha-1)}\Big\},$$

et choisissons c_{11} suffisamment petite (en fonction de w_1) pour que $Y_1 \geqslant (\varrho+1)^{1/\alpha}$ (ce qui est possible d'après la Proposition 1). Nous pouvons alors choisir Y égal à Y_1 dans la définition de U et en déduire que

$$U \geqslant \sum_{Y_1 < p \leqslant Y_1^2} \frac{1-\cos(\vartheta - \tau \log p)}{p^\alpha} \gg \sum_{Y_1 < p \leqslant Y_1^2} \frac{1-\cos(\vartheta - \tau \log p)}{p}\cdot$$

Pour $Y_1 < p \leqslant Y_1^2$, nous avons $|\tau| \log p \leqslant 2$ et par suite $1-\cos(\vartheta-\tau\log p) \gg (\vartheta - \tau \log p)^2$. Nous obtenons donc

$$U \gg \sum_{Y_1 < p \leqslant Y_1^2} \frac{(\vartheta - \tau \log p)^2}{p}\cdot$$

D'après (5·1), il vient

$$U \gg \tau^2 (\log Y_1)^2.$$

Il s'ensuit que

$$U \gg \frac{\tau^2}{(\alpha-1)^2} \gg \log\Big(1 + \frac{\tau^2}{(\alpha-1)^2}\Big),$$

ce qui démontre *a fortiori* (5·9) puisque, d'après (4·30), on a $k \gg_{w_1} \varrho$ pour $w \geqslant w_1$.

Supposons dans un second temps que $w \geqslant w_1$ et $|\tau| \geqslant 2c_{11}(\alpha - 1)$. Introduisons le nombre Y_2 tel que

$$Y_2 := \max\Big\{\exp\Big\{c_{12}\frac{\mathrm{e}^{-k/\varrho}}{\alpha-1}\Big\}\,;\,\exp\Big\{\frac{c_{11}}{|\tau|}\Big\}\Big\},$$

où c_{12} est une constante dépendant uniquement de w_1. D'après (4·18) et (4·19), on a, pour $w \geqslant w_1$, $\alpha - 1 \sim 1/\big(H(w_1)\log_2 x\big)$ et $k/\varrho \sim H(w_1)\mathrm{e}^{-1/H(w_1)}/w_1$. Il s'ensuit donc que

$$\frac{\mathrm{e}^{-k/\varrho}}{\alpha-1} \gg H(w_1)\exp\big\{-H(w_1)\mathrm{e}^{-1/H(w_1)}/w_1\big\}\log_2 x$$

et, puisque $(\varrho+1)^{1/\alpha} \sim (\alpha-1)\log x$ d'après (4·43),

$$(\varrho+1)^{1/\alpha} \ll \frac{1}{H(w_1)}\frac{\log x}{\log_2 x}\cdot$$

Nous avons donc, d'une part, $\log Y_2 \gg \log_2 x$. D'autre part, en choisissant c_{12} assez grande (de sorte que la quantité $c_{12}H(w_1)\exp\big\{-H(w_1)\mathrm{e}^{-1/H(w_1)}/w_1\big\}$ soit également assez grande), nous en déduisons que $Y_2 \geqslant (\varrho+1)^{1/\alpha}$. Il est donc licite d'utiliser (5·13) avec $Y = Y_2$. Il suit

$$U \geqslant \Delta\big((\alpha-1)\log Y_2, |\tau|\log Y_2\big) + O\big(Y_2^{1-\alpha}\,\mathrm{e}^{-(\log_2 x)^{\varepsilon/2}}\big).$$

En minorant $|\tau|\log Y_2$ par c_{11} dans le terme $\Delta\big((\alpha-1)\log Y_2, |\tau|\log Y_2\big)$, nous obtenons

$$U \geqslant \Delta\big((\alpha-1)\log Y_2, c_{11}\big) + O\big(Y_2^{1-\alpha}\,\mathrm{e}^{-(\log_2 x)^{\varepsilon/2}}\big).$$

Nous démontrons en annexe (formule (8·1)) que pour $a > 0$, on a, uniformément pour $0 < \lambda \ll 1$, $\Delta(\lambda, a) \gg_a \log(1 + 1/\lambda)$. Or, sous la condition $w \geqslant w_1$, la Proposition 7 implique que $(\alpha - 1)\log Y_2 \ll 1$, donc

$$\Delta\big((\alpha-1)\log Y_2, c_{11}\big) \gg \log\Big(1 + \frac{1}{(\alpha-1)\log Y_2}\Big)\cdot$$

Il en découle que

$$\begin{aligned} U &\gg \log\Big(1 + \frac{1}{(\alpha-1)\log Y_2}\Big) + O\big(Y_2^{1-\alpha}\,\mathrm{e}^{-(\log_2 x)^{\varepsilon/2}}\big) \\ &\gg \log\Big(1 + \frac{1}{(\alpha-1)\log Y_2}\Big)\cdot \end{aligned}$$

En tenant compte de la définition de Y_2 et de la majoration $\varrho \ll k$, la minoration précédente de U implique

$$U \gg \min\Big\{\frac{k}{\varrho}\,;\,\log\frac{|\tau|}{c_{11}(\alpha-1)}\Big\}\cdot$$

Pour $w \geqslant w_1$ et $|\tau| \geqslant 2c_{11}(\alpha - 1)$, l'inégalité (5·9) découle immédiatement du résultat précédent et de $k \gg \varrho$.

L'estimation (5·9) est donc établie pour $w \geqslant w_1$ où w_1 est une constante quelconque de l'intervalle $]1, +\infty[$. Nos allons faire de même pour la formule (5·10).

Pour démontrer (5·10) pour $w \geqslant w_1$, nous distinguons à nouveau deux cas. Si $|\tau| \geqslant (\alpha-1)\,\mathrm{e}^{k/(2\varrho)}$, (5·10) découle de (5·9). Si $|\tau| < (\alpha-1)\,\mathrm{e}^{k/(2\varrho)}$, nous posons

$$Y_3 := \exp\Big\{c_{12}\frac{\mathrm{e}^{-k/\varrho}}{\alpha-1}\Big\} \qquad \text{et} \qquad Y_4 := \exp\Big\{c_{12}\frac{\mathrm{e}^{-k/(2\varrho)}}{\alpha-1}\Big\},$$

de sorte que, d'après ce qui précède, nous ayons $Y_4 \geqslant Y_3 \geqslant (\varrho+1)^{1/\alpha}$. Nous choisissons alors Y égal à Y_3 dans la définition de U et nous écrivons

$$U \geqslant \sum_{Y_3 < p \leqslant Y_4} \frac{1-\cos(\vartheta - \tau\log p)}{p^\alpha} \gg \sum_{Y_3 < p \leqslant Y_4} \frac{1-\cos(\vartheta - \tau\log p)}{p}\cdot$$

Pour $Y_3 < p \leqslant Y_4$, nous avons $|\tau|\log p \leqslant 1$ et, par suite, $1-\cos(\vartheta-\tau\log p) \gg (\vartheta-\tau\log p)^2$. Nous pouvons donc écrire

$$U \gg \sum_{Y_3 < p \leqslant Y_4} \frac{(\vartheta - \tau\log p)^2}{p}\cdot$$

Avec (5·1), on obtient alors

$$U \gg \vartheta^2 \log\Big(\frac{\log Y_4}{\log Y_3}\Big)\cdot$$

Il s'ensuit que

$$U \gg \vartheta^2\frac{k}{\varrho},$$

ce qui donne (5·10) car $(\alpha-1)\log\varrho^{1/\alpha} \ll 1$.

Considérons maintenant le cas où $w \geqslant w_1$ et choisissons $w_1 \in\,]1, +\infty[$ assez proche de 1 pour que $(\alpha-1)\log\varrho^{1/\alpha} \geqslant 4$. Nous traitons ainsi les « grandes » valeurs de k.

Nous distinguons deux cas selon la taille de $|\tau|$. Posons

$$Y_5 := (\varrho+1)^{1/\alpha}$$

Supposons tout d'abord que $|\tau| < \alpha/\log(\varrho+1)$ et $w \geqslant w_1$. Nous prenons Y égal à Y_5 dans la définition U et nous écrivons

$$U \geqslant \sum_{Y_5<p\leqslant Y_5^2} \frac{1-\cos(\vartheta-\tau\log p)}{p^\alpha}.$$

Puisque $|\tau|\log Y_5 < 1$, nous avons $1-\cos(\vartheta-\tau\log p) \gg (\vartheta-\tau\log p)^2$ pour $Y_5 < p \leqslant Y_5^2$ et donc aussi

$$U \gg \sum_{Y_5<p\leqslant Y_5^2} \frac{(\vartheta-\tau\log p)^2}{p^\alpha}.$$

Pour $w \geqslant w_1$, nous savons, d'après la formule (4·49), que $\varrho^{1/\alpha}/\big((\alpha-1)\log\varrho^{1/\alpha}\big) \asymp k$. Il découle alors de (5·5) que

$$U \gg \frac{k}{\varrho}\Big(\frac{\tau}{\alpha-1}\Big)^2 \gg \frac{k}{\varrho}\log\Big(1+\frac{\tau^2}{(\alpha-1)^2}\Big)$$

et

$$U \gg \frac{k}{\varrho}\Big(\frac{\vartheta}{(\alpha-1)\log\varrho^{1/\alpha}}\Big)^2 \gg \frac{k}{\varrho}\Big(\frac{\vartheta}{1+(\alpha-1)\log\varrho^{1/\alpha}}\Big)^2.$$

Comme $k \ll \varrho$ pour $w \geqslant w_1$, nous obtenons ainsi (5·9) et (5·10) dans le cas où $w \geqslant w_1$ et $|\tau| < \alpha/\log(\varrho+1)$.

Pour terminer, considérons le cas où $w \geqslant w_1$ et $|\tau| \geqslant \alpha/\log(\varrho+1)$. D'après la Proposition 7, nous avons $\log Y_5 \gg \log_2 x$ de sorte que l'on peut choisir $Y = Y_5$ dans (5·13). Comme $(\alpha-1)\log Y_5 \geqslant 4$, la minoration (8·2) (démontrée en annexe)

$$\Delta(\lambda,a) \gg \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\min\{1\,;\,a^2/\lambda^2\},$$

valide uniformément pour $a > 0$ et $\lambda \geqslant 4$, implique

$$\Delta\Big((\alpha-1)\log Y_5, \frac{\tau}{\alpha-1}\Big) \gg \frac{Y_5^{1-\alpha}}{(\alpha-1)\log Y_5}\min\Big\{1\,;\,\frac{\tau^2}{(\alpha-1)^2}\Big\}.$$

On a donc, d'après (5·13),

$$U \gg \frac{\alpha\varrho^{1/\alpha}}{\varrho(\alpha-1)\log\varrho}\min\Big\{1\,;\,\frac{\tau^2}{(\alpha-1)^2}\Big\} + O\Big(\frac{\varrho^{1/\alpha}}{\varrho}\,\mathrm{e}^{-(\log_2 x)^{\varepsilon/2}}\Big).$$

Or, pour $k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, la Proposition 7 implique que $(\alpha-1)\log\varrho^{1/\alpha} \ll \log_2 x$, donc, sous la condition $|\tau| \geqslant \alpha/\log(\varrho+1)$, il découle de la minoration précédente que

$$U \gg \frac{\alpha\varrho^{1/\alpha}}{\varrho(\alpha-1)\log\varrho}\min\Big\{1\,;\,\frac{\tau^2}{(\alpha-1)^2}\Big\}.$$

Puisque $\varrho^{1/\alpha}/\big((\alpha-1)\log\varrho^{1/\alpha}\big) \asymp k$, on a donc

$$U \gg \frac{k}{\varrho}\min\Big\{1\,;\,\frac{\tau^2}{(\alpha-1)^2}\Big\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$U \gg \frac{k}{\varrho}\min\Big\{1\,;\,\log\Big(1+\frac{\tau^2}{(\alpha-1)^2}\Big)\Big\}.$$

Cette inégalité fournit à la fois (5·9) et (5·10) dans le cas où $w \geqslant w_1$ et $|\tau| \geqslant \alpha/\log(\varrho+1)$. Cela achève notre démonstration. $\square$

Afin d'estimer la contribution d'un voisinage du point-selle à la double intégrale (3·14), nous avons besoin d'un développement de Taylor de la fonction intégrée. Nous établissons ce développement dans le lemme suivant.

Rappelons que

$$\delta_{\vartheta\vartheta} = k + \varrho^2 f_{zz}(\varrho, \alpha), \qquad \delta_{\tau\tau} = f_{ss}(\varrho, \alpha), \qquad \delta_{\vartheta\tau} = \varrho f_{zs}(\varrho, \alpha),$$

désignent les dérivées partielles secondes de l'application $g : (\vartheta, \tau) \longmapsto f(\varrho\, \mathrm{e}^{i\vartheta}, \alpha + i\tau)$ calculées au point $(0, 0)$.

Lemme 15. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Pour* x *assez grand,* $k/\log_2 x \to +\infty$, $k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, $|\vartheta| \leqslant \frac{1}{2}$ *et* $|\tau| \leqslant 1/\big(2\log(r+2)\big)$,[9] *on a*

$$\begin{aligned} f(\varrho\, \mathrm{e}^{i\vartheta}, \alpha + i\tau) = f(\varrho, \alpha) + ik\vartheta - i\tau \log x - \frac{1}{2}\delta_{\vartheta\vartheta}\vartheta^2 - \frac{1}{2}\delta_{\tau\tau}\tau^2 - \delta_{\vartheta\tau}\vartheta\tau \\ + O\bigg(k\vartheta^3 + \frac{\varrho^{1/\alpha}}{\alpha - 1}\sum_{m=0}^{2}\Big((\log\varrho)^m + \frac{1}{(\alpha-1)^m}\Big)\vartheta^{2-m}\tau^{m+1}\bigg). \end{aligned}$$

Démonstration. La formule de Taylor donne

$$\begin{aligned} g(\vartheta, \tau) &= \sum_{\ell \leqslant 2} \frac{\varrho^\ell(\mathrm{e}^{i\vartheta} - 1)^\ell}{\ell!}\partial_z^\ell f(\varrho, \alpha + i\tau) + I \\ &= \sum_{\ell + m \leqslant 2} \frac{\varrho^\ell(\mathrm{e}^{i\vartheta} - 1)^\ell\,(i\tau)^m}{\ell!\, m!}\partial_z^\ell \partial_s^m f(\varrho, \alpha) \\ &\qquad + J_3 + \varrho(\mathrm{e}^{i\vartheta} - 1)J_2 + \frac{1}{2}\varrho^2(\mathrm{e}^{i\vartheta} - 1)^2 J_1 + I \end{aligned}$$

avec

$$I := \int_\varrho^{\varrho\mathrm{e}^{i\vartheta}} \frac{(\varrho\mathrm{e}^{i\vartheta} - u)^2}{2} f_{zzz}(u, \alpha + i\tau)\,\mathrm{d}u$$

et, pour $m = 0, 1, 2$,

$$J_{m+1} := \int_\alpha^{\alpha + i\tau} \frac{(\alpha + i\tau - v)^m}{m!}\partial_z^{2-m}\partial_s^{m+1} f(\varrho, v)\,\mathrm{d}v.$$

D'après les définitions de ϱ et α, on a $f_z(\varrho, \alpha) = k/\varrho$ et $f_s(\varrho, \alpha) = -\log x$. Pour $k/\log_2 x \to +\infty$, (4·16) implique que ϱ tend vers $+\infty$ donc, d'après (4·37) et la Proposition 7, nous avons

$$I \ll \frac{\varrho^{1/\alpha}}{\log\varrho}\vartheta^3 \ll k\vartheta^3 \qquad \text{et} \qquad J_{m+1} \ll \frac{\varrho^{1/\alpha}}{(\alpha-1)\varrho^{2-m}}\Big((\log\varrho)^m + \frac{1}{(\alpha-1)^m}\Big)\tau^{m+1}.$$

Avec ces estimations, le développement de Taylor devient

$$\begin{aligned} g(\vartheta, \tau) = f(\varrho, \alpha) - i\tau\log x + k(\mathrm{e}^{i\vartheta} - 1) \\ - \frac{1}{2}\delta_{\tau\tau}\tau^2 + i\delta_{\vartheta\tau}(\mathrm{e}^{i\vartheta} - 1)\tau + \frac{1}{2}\varrho^2 f_{zz}(\varrho, \alpha)(\mathrm{e}^{i\vartheta} - 1)^2 \\ + O\bigg(k\vartheta^3 + \frac{\varrho^{1/\alpha}}{\alpha - 1}\sum_{m=0}^{2}\Big((\log\varrho)^m + \frac{1}{(\alpha-1)^m}\Big)\vartheta^{2-m}\tau^{m+1}\bigg). \end{aligned}$$

9. Les conditions imposées à ϑ et ϱ justifient que $(r, \sigma) = (\varrho\, \mathrm{e}^{i\vartheta}, \alpha + i\tau)$ appartient au domaine (4·1) sur lequel la fonction f est définie.

Enfin, l'estimation (4·37) et la Proposition 7 donnent $\delta_{\vartheta\tau} \ll \varrho^{1/\alpha}/(\alpha-1)$ et $\varrho^2 f_{zz}(\varrho,\alpha) \ll \varrho^{1/\alpha}/(\log\varrho) \ll k$. Donc

$$\begin{aligned} k(\mathrm{e}^{i\vartheta}-1) &= ik\vartheta - \frac{1}{2}k\vartheta^2 + O(k\vartheta^3),\\ i\delta_{\vartheta\tau}(\mathrm{e}^{i\vartheta}-1)\tau &= -\,\delta_{\vartheta\tau}\vartheta\tau + O\Big(\frac{\varrho^{1/\alpha}}{\alpha-1}\vartheta^2\tau\Big),\\ \frac{1}{2}\varrho^2 f_{zz}(\varrho,\alpha)(\mathrm{e}^{i\vartheta}-1)^2 &= -\,\frac{1}{2}\varrho^2 f_{zz}(\varrho,\alpha)\vartheta^2 + O(k\vartheta^3). \end{aligned}$$

Nous obtenons notre résultat en reportant ces estimations dans le développement de Taylor et en utilisant la définition de $\delta_{\vartheta\vartheta}$. □

6. Démonstration du Théorème 2

Nous commençons par établir les implications existant entre le résultat de notre Théorème 2 et l'estimation (3·9) de $\pi_k(x)$ obtenue par Hildebrand et Tenenbaum dans [19] pour $k \ll (\log x)/(\log_2 x)^2$. Nous obtenons d'une part que notre résultat implique celui de Hildebrand et Tenenbaum sur l'ensemble du domaine $k \ll (\log x)/(\log_2 x)^2$. Réciproquement, l'estimation (3·9) fournit un résultat équivalent au notre pour les « petites » valeurs de k, c'est-à-dire $k \ll (\log_2 x)^{12}$.(10) Cela nous permet de limiter la démonstration de notre théorème au cas $k \gg (\log_2 x)^{12}$. Ces deux implications sont l'objet du lemme suivant.

Lemme 16. *Avec les notations de la Proposition 4, on a, pour $x \geqslant 3$ et k vérifiant (4·14),*

$$\alpha\sqrt{\delta} = \sqrt{k/\varrho}(\log x)^2\{1 + O(1/L_0)\}. \tag{6·1}$$

Démonstration. Nous utilisons les estimations de $f_s(\varrho,\alpha)$, $f_{zz}(\varrho,\alpha)$, $f_{zs}(\varrho,\alpha)$ et $f_{ss}(\varrho,\alpha)$ établies dans le Lemme 1 de [19] ainsi que les évaluations de ϱ et α rappelées dans la Proposition 4. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \log x = -\,f_s(\varrho,\alpha) &= \frac{\varrho}{\alpha-1} + O\big((\varrho+2)\log(\varrho+2)\big) = \frac{\varrho}{\alpha-1}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{L_0}\Big)\Big\},\\ \delta_{\vartheta\vartheta} &= k + \varrho^2 f_{zz}(\varrho,\alpha) = k + O\Big(\frac{\varrho^2}{(\varrho+2)\log(\varrho+2)}\Big) = k\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{L_0}\Big)\Big\},\\ \delta_{\vartheta\tau} &= \varrho f_{zs}(\varrho,\alpha) = -\frac{\varrho}{\alpha-1} + O\big(\varrho\log(\varrho+2)\big) = O(\log x),\\ \delta_{\tau\tau} &= f_{ss}(\varrho,\alpha) = \frac{\varrho}{(\alpha-1)^2} + O\big((\varrho+2)(\log(\varrho+2))^2\big) = \frac{\varrho}{(\alpha-1)^2}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{L_0}\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Il en découle que

$$\delta := \delta_{\vartheta\vartheta}\delta_{\tau\tau} - (\delta_{\vartheta\tau})^2 = \frac{k}{\varrho}(\log x)^2\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{L_0}\Big)\Big\}.$$

Or la Proposition 4 implique, en particulier, que $\alpha = 1 + O(1/L_0)$, donc

$$\alpha^2\delta = \frac{k}{\varrho}(\log x)^2\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{L_0}\Big)\Big\}.$$

Nous en déduisons immédiatement (6·1). □

10. Nous n'avons pas cherché, pour des raisons techniques, à optimiser le domaine sur lequel notre résultat est plus précis que celui de Hildebrand et Tenenbaum. Avec plus de soin, nous aurions certainement pu agrandir ce domaine jusqu'à $k \gg (\log_2 x)^{1+\varepsilon_0}$.

Lorsque $k \ll (\log_2 x)^{12}$, l'estimation (6·1) peut encore s'écrire

$$\alpha\sqrt{\delta} = \sqrt{k/\varrho}(\log x)^2\{1 + O(1/\log_2 x)\}.$$

Nous constatons donc que pour $k \ll (\log_2 x)^{12}$, le Théorème 2 est une conséquence du résultat (3·9) de Hildebrand et Tenenbaum. Pour compléter notre démonstration, il suffit donc de démontrer que pour x assez grand et $(\log_2 x)^{12} \ll k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, on a

$$\pi_k(x) = \frac{\varrho^{-k}x^\alpha F(\varrho,\alpha)}{W(k)W(\varrho)\alpha\sqrt{\delta}}\Big\{1 + O_\varepsilon\Big(\frac{(\log_2 x)^5}{\sqrt{k}}\Big)\Big\}.$$

En fait, pour $k \gg (\log_2 x)^{12}$, la formule de Stirling et (4·27) impliquent sans difficultés que l'estimation précédente peut encore se réécrire

$$\pi_k(x) = \frac{\varrho^{-k}x^\alpha F(\varrho,\alpha)}{2\pi\alpha\sqrt{\delta}}\Big\{1 + O_\varepsilon\Big(\frac{(\log_2 x)^5}{\sqrt{k}}\Big)\Big\}. \tag{6·2}$$

Nous consacrons la suite de ce chapitre à la démonstration de cette estimation. Nous fixons $\varepsilon > 0$ et nous supposons que x est assez grand et que k vérifie l'encadrement $(\log_2 x)^{12} \ll k \leqslant K_{x,\varepsilon}$. Nous découpons la démonstration en trois propositions.

Proposition 9. *Soit* $T = (\log x)^6$. *On a*

$$x^{-\alpha}\varrho^k\pi_k(x) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-T}^{T} F(\varrho\,\mathrm{e}^{i\vartheta}, \alpha + i\tau)\frac{x^{i\tau}\,\mathrm{e}^{-i\vartheta k}}{\alpha + i\tau}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\vartheta + O\Big(\frac{F(\varrho,\alpha)}{(\log x)^3}\Big).$$

Démonstration. Supposons, comme on le peut, que x est un demi-entier. Nous obtenons par la formule de Perron

$$\begin{aligned}
x^{-\alpha}\varrho^k\pi_k(x) &= x^{-\alpha}\varrho^k\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{n\leqslant x}(\varrho\,\mathrm{e}^{i\vartheta})^{\omega(n)-k}\Big)\mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-T}^{T} F(\varrho\,\mathrm{e}^{i\vartheta}, \alpha + i\tau)\frac{x^{i\tau}\,\mathrm{e}^{-i\vartheta k}}{\alpha + i\tau}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\vartheta \\
&\quad + O\Big(\sum_{n\geqslant 1}\frac{\varrho^{\omega(n)}}{n^\alpha}\min\Big\{1, \frac{1}{T|\log(x/n)|}\Big\}\Big).
\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, le terme d'erreur est

$$\ll \sum_{|\log(x/n)|\leqslant\varepsilon}\frac{\varrho^{\omega(n)}}{n^\alpha} + \frac{1}{T\varepsilon}F(\varrho,\alpha).$$

Choisissons $\varepsilon = T^{-1/2} = (\log x)^{-3}$. Le second des deux termes ci-dessus est alors de l'ordre de grandeur de l'erreur attendue. Afin d'estimer le premier, nous introduisons la fonction

$$w(\tau) = \max\{1 - |\tau|, 0\}$$

dont la transformée de Fourier vaut

$$\widehat{w}(\tau) = \Big(\frac{\sin(\tau/2)}{\tau/2}\Big)^2 \ll \frac{1}{1+\tau^2}.$$

Nous pouvons alors écrire

$$\sum_{|\log(x/n)|\leqslant\varepsilon}\frac{\varrho^{\omega(n)}}{n^\alpha}\leqslant 2\sum_{n\geqslant 1}\frac{\varrho^{\omega(n)}}{n^\alpha}w\Big(\frac{\log(x/n)}{2\varepsilon}\Big)=\frac{1}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\varrho^{\omega(n)}}{n^\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{w}(\tau)\Big(\frac{x}{n}\Big)^{i\tau/(2\varepsilon)}\mathrm{d}\tau$$
$$\ll\int_{-\infty}^{\infty}\Big|F\Big(\varrho,\alpha+i\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big)\Big|\frac{\mathrm{d}\tau}{1+\tau^2}.$$

Quand $\varepsilon<|\tau|\leqslant 1/\varepsilon$, la majoration (5·8) et la Proposition 7 impliquent

$$\Big|F\Big(\varrho,\alpha+i\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big)\Big|\ll F(\varrho,\alpha)\Big\{\mathrm{e}^{-c_{10}k}+\Big(1+\frac{1}{(\alpha-1)^2}\Big)^{-c_{10}k\varrho/(k+\varrho)}\Big\}\ll\frac{F(\varrho,\alpha)}{(\log x)^3}.$$

En utilisant par ailleurs la majoration triviale

$$\Big|F\Big(\varrho,\alpha+i\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big)\Big|\ll F(\varrho,\alpha)$$

quand $|\tau|\leqslant\varepsilon$ et $|\tau|>1/\varepsilon$, on constate que l'intégrale ci-dessus est

$$O(\varepsilon F(\varrho,\alpha))=O\Big(\frac{F(\varrho,\alpha)}{(\log x)^3}\Big)$$

ce qui fournit le résultat. □

Posons

$$\vartheta_0:=\frac{c_{13}w}{w-1}\sqrt{\frac{\log_2 x}{k}}\tag{6·3}$$

et

$$\tau_0:=c_{13}^2(\alpha-1)\sqrt{\frac{(k+\varrho)\log_2 x}{k\varrho}},\tag{6·4}$$

où c_{13} désigne une constante, ne dépendant que de ε, que l'on choisira assez grande. Pour $(\log_2 x)^{12}\leqslant k\ll K_{x,\varepsilon}$, on a, d'après la Proposition 7, $\vartheta_0\leqslant\frac{1}{2}$ et $\tau_0\leqslant 1/\big(2\log(\varrho+2)\big)$. Le point $(\varrho\,\mathrm{e}^{i\vartheta},\alpha+i\tau)$ avec $|\vartheta|\leqslant\vartheta_0$ et $|\tau|\leqslant\tau_0$ appartient donc au domaine (4·1) sur lequel la fonction f est définie.

Proposition 10. *Pour c_{13} assez grande, on a*

$$x^{-\alpha}\varrho^k\pi_k(x)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}\int_{-\tau_0}^{\tau_0}F(\varrho\,\mathrm{e}^{i\vartheta},\alpha+i\tau)\frac{x^{i\tau}\,\mathrm{e}^{-i\vartheta k}}{\alpha+i\tau}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\vartheta+O\Big(\frac{F(\varrho,\alpha)}{(\log x)^3}\Big).$$

Démonstration. Il suffit cette fois d'estimer les contributions des domaines $|\vartheta|\leqslant\pi$, $\tau_0\leqslant|\tau|\leqslant T$ et $\vartheta_0\leqslant|\vartheta|\leqslant\pi$, $|\tau|\leqslant T$ à la double intégrale de la Proposition 9. En appliquant le Lemme 14, nous constatons que ces contributions sont

$$\ll F(\varrho,\alpha)\{T\,\mathrm{e}^{-c_{10}k}+I(\vartheta_0,0)+I(0,\tau_0)\},\tag{6·5}$$

où les quantités $I(\vartheta_0,0)$ et $I(0,\tau_0)$ sont définies par

$$I(a,b):=\int_a^\pi\mathrm{e}^{-c_{10}k(w-1)^2\vartheta^2/w^2}\mathrm{d}\vartheta\times\int_b^T\Big(1+\frac{\tau^2}{(\alpha-1)^2}\Big)^{-c_{10}k\varrho/(k+\varrho)}\mathrm{d}\tau\qquad(a,b>0).$$

À l'aide des estimations classiques

$$\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-A\vartheta^2}\,\mathrm{d}\vartheta \ll \frac{\mathrm{e}^{-Aa^2}}{\sqrt{A}} \qquad (A>0,\ a\geqslant A^{-1/2})$$

et

$$\int_b^{+\infty} (1+u^2)^{-B}\,\mathrm{d}u \ll \frac{(1+b^2)^{-B/2}}{\sqrt{B}} \qquad (B\geqslant 2,\ b\geqslant 0),$$

nous obtenons

$$I(\vartheta_0,0) \ll \frac{w(\alpha-1)}{(w-1)\sqrt{k}}\sqrt{\frac{k+\varrho}{k\varrho}}\mathrm{e}^{-c_{10}k(w-1)^2\vartheta_0^2/w^2}$$

et

$$I(0,\tau_0) \ll \frac{w(\alpha-1)}{(w-1)\sqrt{k}}\sqrt{\frac{k+\varrho}{k\varrho}}\Big(1+\frac{\tau_0^2}{(\alpha-1)^2}\Big)^{-c_{10}k\varrho/(2(k+\varrho))}.$$

Il découle de la Proposition 7 que l'on a, sous les conditions $\log_2 x \ll k \leqslant K_{x,\varepsilon}$,

$$\frac{w(\alpha-1)}{(w-1)\sqrt{k}}\sqrt{\frac{k+\varrho}{k\varrho}} \asymp \frac{w^{3/2}}{\sqrt{\log w}(w-1)^{3/2}\log x} \ll \frac{(\log_2 x)^{3/2}}{\log x}.$$

Tenant compte des expressions de ϑ_0 et τ_0, il s'ensuit que

$$I(\vartheta_0,0) \ll \frac{(\log_2 x)^{3/2}}{(\log x)^{1+c_{10}c_{13}^2}} \qquad \text{et} \qquad I(0,\tau_0) \ll \frac{(\log_2 x)^{3/2}}{(\log x)^{1+c_{10}c_{13}^4/2}}.$$

Le majorant (6·5) est donc de l'ordre de grandeur annoncé à condition de prendre c_{13} assez grande. □

Proposition 11. *Soit*

$$J := \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}\int_{-\tau_0}^{\tau_0} \frac{F(\varrho\,\mathrm{e}^{i\vartheta},\alpha+i\tau)x^{i\tau}\,\mathrm{e}^{-i\vartheta k}}{F(\varrho,\alpha)\,(\alpha+i\tau)}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Pour c_{13} assez grande, on a

$$J = \frac{1}{2\pi\alpha\sqrt{\delta}}\Big\{1+O\Big(\frac{(\log_2 x)^5}{\sqrt{k}}\Big)\Big\}.$$

Démonstration. La première étape de cette démonstration consiste à utiliser le développement de Taylor établi dans le Lemme 15 pour estimer la fonction sous la double intégrale définissant J. Nous nous ramenons ainsi à l'étude de l'intégrale d'une gaussienne.

D'après le Lemme 15, l'intégrande de J est égale à $\exp\{\chi(\vartheta,\tau)\}/(\alpha+i\tau)$ avec

$$\chi(\vartheta,\tau) := -\frac{1}{2}\delta_{\vartheta\vartheta}\vartheta^2 - \frac{1}{2}\delta_{\tau\tau}\tau^2 - \delta_{\vartheta\tau}\vartheta\tau + O\Big(\frac{(\log_2 x)^5}{\sqrt{k}}\Big)$$

car pour $|\vartheta|\leqslant\vartheta_0$ et $|\tau|\leqslant\tau_0$, la Proposition 7 entraine que

$$k\vartheta^3 + (\log x)\sum_{\ell=0}^{2}\Big((\log\varrho)^\ell + \frac{1}{(\alpha-1)^\ell}\Big)\vartheta^{2-\ell}\tau^{\ell+1} \ll \frac{w^{7/2}\sqrt{\log w}(\log_2 x)^{3/2}}{\sqrt{k}(w-1)^{7/2}} \ll \frac{(\log_2 x)^5}{\sqrt{k}}.$$

Nous en déduisons que, pour $k \geqslant (\log_2 x)^{12}$,

$$\mathrm{e}^{\chi(\vartheta,\tau)} = \exp\Big\{-\frac{1}{2}\delta_{\vartheta\vartheta}\vartheta^2 - \delta_{\vartheta\tau}\vartheta\tau - \frac{1}{2}\delta_{\tau\tau}\tau^2\Big\}\Big\{1 + O\Big(\frac{(\log_2 x)^5}{\sqrt{k}}\Big)\Big\}.$$

Par ailleurs, nous avons $\alpha + i\tau = \alpha\{1 + O(\tau_0)\}$ et $\tau_0 \ll (\log_2 x)^5/\sqrt{k}$, donc

$$J = \frac{1}{4\alpha\pi^2}\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}\int_{-\tau_0}^{\tau_0} \mathrm{e}^{\{-\frac{1}{2}\delta_{\vartheta\vartheta}\vartheta^2 - \delta_{\vartheta\tau}\vartheta\tau - \frac{1}{2}\delta_{\tau\tau}\tau^2\}}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\vartheta\,\Big\{1 + O\Big(\frac{(\log_2 x)^5}{\sqrt{k}}\Big)\Big\}. \tag{6·6}$$

Désignons par J_0 l'intégrale double ci-dessus. Dans cette seconde étape, nous appliquons les méthodes classiques d'estimation des intégrales de Gauß pour évaluer l'ordre de grandeur de J_0.

En utilisant successivement l'égalité

$$\frac{1}{2}\delta_{\vartheta\vartheta}\vartheta^2 + \delta_{\vartheta\tau}\vartheta\tau + \frac{1}{2}\delta_{\tau\tau}\tau^2 = \frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta_{\tau\tau}}\vartheta^2 + \frac{1}{2}\Big(\sqrt{\delta_{\tau\tau}}\tau + \frac{\delta_{\vartheta\tau}}{\sqrt{\delta_{\tau\tau}}}\vartheta\Big)^2$$

et le changement de variable $u = \sqrt{\delta_{\tau\tau}}\tau + \delta_{\vartheta\tau}\vartheta/\sqrt{\delta_{\tau\tau}}$ à ϑ fixé, nous pouvons réécrire J_0 sous la forme

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}\Big(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\delta\vartheta^2/\delta_{\tau\tau}}\int_{-\tau_0}^{\tau_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\{\sqrt{\delta_{\tau\tau}}\tau + \delta_{\vartheta\tau}\vartheta/\sqrt{\delta_{\tau\tau}}\}^2}\,\mathrm{d}\tau\Big)\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta_{\tau\tau}}}\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}\Big(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\delta\vartheta^2/\delta_{\tau\tau}}\int_{-A(-\vartheta)}^{A(\vartheta)}\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u\Big)\,\mathrm{d}\vartheta \end{aligned}$$

avec

$$A(\vartheta) := \sqrt{\delta_{\tau\tau}}\tau_0 + \frac{\delta_{\vartheta\tau}}{\sqrt{\delta_{\tau\tau}}}\vartheta.$$

Comme $\delta_{\vartheta\tau} < 0$, on constate que

$$\min_{|\vartheta|\leqslant\vartheta_0} A(\vartheta) = A(\vartheta_0) = \sqrt{\delta_{\tau\tau}}\tau_0 + \frac{\delta_{\vartheta\tau}}{\sqrt{\delta_{\tau\tau}}}\vartheta_0.$$

D'après les Propositions 7 et 8, on a

$$-\delta_{\vartheta\tau} \asymp \log x,$$

$$\delta_{\tau\tau} \asymp (\log x)(\log_2 x)\big(1 + H(w)\big) \asymp (1 + \log w)\frac{(\log x)^2}{k}$$

et

$$\frac{\tau_0}{c_{13}^2} = (\alpha - 1)\sqrt{\frac{(k+\varrho)\log_2 x}{k\varrho}} \asymp \frac{\sqrt{wk\log_2 x}}{\sqrt{(w-1)\log w}\log x},$$

donc, d'après les définitions (6·3) et (6·4) de ϑ_0 et τ_0, on a

$$\sqrt{\delta_{\tau\tau}}\tau_0 \asymp c_{13}^2\frac{w\sqrt{\log_2 x}}{w-1} \qquad \text{et} \qquad -\frac{\delta_{\vartheta\tau}\vartheta_0}{\sqrt{\delta_{\tau\tau}}} \asymp c_{13}\frac{\sqrt{w\log_2 x}}{\sqrt{(w-1)\log w}}$$

En choisissant c_{13} suffisamment grande, nous obtenons donc

$$\min_{|\vartheta|\leqslant\vartheta_0} A(\vartheta) = A(\vartheta_0) \asymp c_{13}^2\frac{w\sqrt{\log_2 x}}{w-1} \gg c_{13}^2\sqrt{\log_2 x}.$$

Par conséquent, pour c_{13} assez grande, nous déduisons, d'estimations classiques sur les intégrales de Gauß, que, pour tout $|\vartheta| \leqslant \vartheta_0$,

$$\int_{-A(-\vartheta)}^{A(\vartheta)} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log x)^{10}}\Big)\Big\}.$$

Il s'ensuit que

$$J_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{\delta_{\tau\tau}}}\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\delta\vartheta^2/\delta_{\tau\tau}}\,\mathrm{d}\vartheta\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log x)^{10}}\Big)\Big\}.$$

Les Propositions 7 et 8 impliquent que

$$\delta\vartheta_0^2/\delta_{\tau\tau} \gg c_{13}\log_2 x.$$

Nous avons donc, pour c_{13} choisie assez grande,

$$\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\delta\vartheta^2/\delta_{\tau\tau}}\,\mathrm{d}\vartheta = \sqrt{\frac{2\pi\delta_{\tau\tau}}{\delta}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log x)^{10}}\Big)\Big\}.$$

Il vient alors

$$J_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log x)^{10}}\Big)\Big\}.$$

Nous obtenons notre résultat en reportant cette évaluation dans (6·6). □

L'estimation (6·2) est alors une conséquence immédiate des quatre propositions précédentes et de la majoration $\sqrt{\delta} \ll (\log x)^2$ déduite de la Proposition 8. Nous avons donc achevé la démonstration du Théorème 2.

7. Démonstration des corollaires

7.1. Démonstration du Corollaire 4

Nous démontrons dans ce chapitre un résultat plus précis que le Corollaire 4. Rappelons que $\mathcal{E}$ a été défini par (4·29) et que l'on a $\mathcal{E} \ll (\log_2 x)^{-1/4}$.

Corollaire 7. *Soient* $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$. *Pour* x *assez grand et* $(\log_2 x)^{1+\eta} \ll k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, *on a*

$$\pi_k(x) = \bigg(\frac{x\mathrm{e}^k}{\big(S(\beta)\log x\big)^k}\bigg)^{\beta}\exp\{O_{\eta,\varepsilon}(k\mathcal{E})\}. \tag{7·1}$$

Nous démontrons ce résultat en plusieurs étapes. Le lemme suivant fournit le comportement asymptotique de $\log\big(\varrho^{-k}x^{\alpha}\big)$ lorsque $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$.

Lemme 17. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Pour* x *assez grand et* $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, *on a*

$$\log\big(\varrho^{-k}x^{\alpha}\big) = \beta\log x - \beta k\log_2 x - \beta k\log S(\beta) + O_{\varepsilon}(k\mathcal{E}). \tag{7·2}$$

Démonstration. La formule (4·26) implique que

$$\alpha \log x = \beta \log x + O\Big(\frac{k\mathcal{R}}{\log w}\Big),$$

où $\mathcal{R}$ a été défini par (4·28). Par ailleurs, pour $w - 1 \ll 1/\log_3 x$, (4·22) implique

$$\begin{aligned}\alpha \log x &= \beta \log x + \frac{\log x}{\log_2 x} \log \kappa_1(\beta) + O\Big((w-1)\frac{\log x}{\log_2 x}\Big) \\ &= \beta \log x + k \log \kappa_1(\beta) + O\big((w-1)k\big).\end{aligned}$$

Des deux précédentes formules, on tire

$$\alpha \log x = \beta \log x + k \log \kappa_1(\beta) + O(k\mathcal{E}), \tag{7·3}$$

car $\log\big(1/\kappa_1(\beta)\big) \ll \mathcal{R}/\log w$ et $\min\{\mathcal{R}/\log w\,;\, w-1\} \ll \mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ a été défini par (4·29).

L'estimation (4·27) donne

$$k \log \varrho = \beta k \log_2 x + \beta k \log S(\beta) + k \log \kappa_1(\beta) + O(k\mathcal{E}). \tag{7·4}$$

Nous obtenons (7·2) en combinant (7·3) et (7·4). □

Le lemme suivant fournit le comportement asymptotique de $\log\big(F(\varrho,\alpha)\big)$ lorsque $k \gg (\log_2 x)^{1+\eta}$.

Lemme 18. *Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$. Pour x assez grand et $(\log_2 x)^{1+\eta} \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, on a*

$$\log F(\varrho,\alpha) = \beta k\Big\{1 + O_\eta\Big(\min\Big\{\frac{1}{(\log w)\log_2 x}\,;\, w-1\Big\}\Big)\Big\}. \tag{7·5}$$

On a

$$\min\Big\{\frac{1}{(\log w)\log_2 x}\,;\, w-1\Big\} \ll \frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}.$$

Démonstration. Pour évaluer $\log F(\varrho,\alpha)$, nous utilisons l'identité

$$\log F(\varrho,\alpha) = \int_0^{\varrho} f_z(r,\alpha)\,\mathrm{d}r \tag{7·6}$$

et des estimations adéquates de $f_z(r,\alpha)$. Nous distinguons trois cas selon la taille de l'entier k.

Lorsque k est « petit », c'est-à-dire

$$(\log_2 x)^{1+\eta} \leqslant k \leqslant \frac{\log x}{(\log_2 x)^2},$$

nous utilisons l'estimation de $f_z(r,\sigma)$ obtenue par Hildebrand et Tenenbaum dans [19] pour $r > 0$ et $1 < \sigma \ll 1$:

$$f_z(r,\sigma) = \log\frac{1}{\sigma-1} - \log_2(r+2) - \gamma + O\Big(\frac{1}{\log(r+2)} + (\sigma-1)\log(r+2)\Big).$$

On a $\varrho \to +\infty$ donc, en intégrant la formule précédente entre 0 et ϱ pour $\sigma = \alpha$, on obtient

$$\begin{aligned}\log F(\varrho,\alpha) &= \varrho \log \frac{1}{\alpha-1} - \varrho \log_2 \varrho + c_{14}\varrho + O\Big(\frac{\varrho}{\log \varrho} + (\alpha-1)\varrho\log\varrho\Big)\\ &= \varrho f_z(\varrho,\alpha) + O\Big(\frac{\varrho}{\log\varrho} + (\alpha-1)\varrho\log\varrho\Big).\end{aligned}$$

On a $\varrho f_z(\varrho,\alpha) = k$. Par ailleurs, pour $k \leqslant (\log x)/(\log_2 x)^2$, la Proposition 4 entraine $(\alpha-1)(\log\varrho)^2 \ll 1$. Donc

$$\log F(\varrho,\alpha) = k\Big\{1 + O\Big(\frac{\varrho}{k\log\varrho}\Big)\Big\}$$

ce qui implique, d'après cette même Proposition 4,

$$\log F(\varrho,\alpha) = k\Big\{1 + O_\eta\Big(\frac{1}{\log w \log k}\Big)\Big\}. \tag{7·7}$$

Supposons dans un deuxième temps que

$$\mathrm{e}^{-(c_8/2)(\log_2 x)^{4/7}}\frac{\log x}{\log_2 x} \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}.$$

Il découle alors de la Proposition 7, que l'on a $\log \varrho^{1/\alpha} \gg \log_2 x$ et $\alpha - 1 \gg \mathrm{e}^{-(c_8/4)(\log_2 x)^{4/7}}$. On introduit alors l'estimation (4·31) dans (7·6). On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\log F(\varrho,\alpha) &= \frac{\alpha}{\alpha-1}\int_0^\varrho G\Big(\frac{\alpha-1}{\alpha}\log r\Big)\frac{r^{1/\alpha}\,\mathrm{d}r}{r\log r} + O\Big(\frac{\varrho^{1/\alpha}}{\log\varrho}\Big)\\ &= \frac{\alpha\,\varrho^{1/\alpha}}{(\alpha-1)\log\varrho}G\Big(\frac{\alpha-1}{\alpha}\log\varrho\Big) + O\Big(\frac{\varrho^{1/\alpha}}{\log\varrho}\Big)\\ &= \varrho f_z(\varrho,\alpha) + O\Big(\frac{\varrho^{1/\alpha}}{\log\varrho}\Big).\end{aligned}$$

Or $\varrho f_z(\varrho,\alpha) = k$, donc, d'après la Proposition 7, on a

$$\log F(\varrho,\alpha) = k\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log w \log_2 x}\Big)\Big\}. \tag{7·8}$$

En associant (7·7) et (7·8), nous obtenons donc, pour $(\log_2 x)^{1+\eta} \ll k \leqslant K_{x,\varepsilon}$,

$$\log F(\varrho,\alpha) = k\Big\{1 + O_\eta\Big(\frac{1}{\log w \log k}\Big)\Big\}. \tag{7·9}$$

Cette formule ne fournit pas d'équivalent asymptotique de $\log F(\varrho,\alpha)$ lorsque $(\log w)\log k$ ne tend pas vers $+\infty$, c'est-à-dire lorsque $\kappa := \big((w-1)\log_2 x\big)/w$ ne tend pas vers $+\infty$. Nous comblons cette lacune dans la dernière étape de cette démonstration en évaluant $\log F(\varrho,\alpha)$ pour les « grandes » valeurs de k.

Supposons que $k \leqslant K_{x,\varepsilon}$ et $w - 1 \ll 1/\log_3 x$. On a donc $\log\varrho \gg \log_2 x$. En introduisant l'estimation (4·32) dans (7·6), il vient

$$\begin{aligned}\log F(\varrho,\alpha) &= \frac{\alpha}{S(\alpha)}\int_0^\varrho \frac{r^{1/\alpha}\,\mathrm{d}r}{r\log r} + O\Big(\frac{\varrho^{1/\alpha}}{\{(\alpha-1)\log\varrho\}^2}\Big)\\ &= \frac{\alpha^2\varrho^{1/\alpha}}{S(\alpha)\log\varrho}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\alpha-1)\log_2 x}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

D'après les estimations (4·49) et $\alpha - 1 \asymp 1/\kappa$, il s'ensuit que

$$\log F(\varrho, \alpha) = \alpha k\{1 + O(w-1)\}.$$

On a donc, d'après (4·55),

$$\log F(\varrho, \alpha) = \beta k\{1 + O(w-1)\}. \tag{7·10}$$

En réunissant (7·9) et (7·10), on obtient, sur l'ensemble du domaine $(\log_2 x)^{1+\eta} \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, l'estimation

$$\log F(\varrho, \alpha) = \beta k\Big\{1 + O_\eta\Big(\min\Big\{\frac{1}{(\log w)\log_2 x}\,;\, w-1\Big\}\Big)\Big\}.$$

On constate sans difficulté que le terme d'erreur atteint son maximum pour $w - 1 \asymp (\log_2 x)^{-1/2}$ et qu'il est alors $\ll_\eta (\log_2 x)^{-1/2}$. □

Démonstration du Corollaire 7. Nous fixons $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ et nous supposons x assez grand et $(\log_2 x)^{1+\eta} \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$.

En combinant (7·2) et (7·5), on a

$$\log\big(\varrho^{-k} x^\alpha F(\varrho, \alpha)\big) = \beta \log x + \beta k - \beta k \log\big(S(\beta)\log x\big) + O(k\mathcal{E}).$$

D'après (4·72), on a $\delta \asymp (w-1)(\log w)(\log x)^2/w$ et donc, pour $k \geqslant (\log_2 x)^{1+\eta}$, on a *a fortiori* $\delta = \exp\{O(k\mathcal{E})\}$.

De plus, pour $k \geqslant (\log x)^{1+\eta}$, l'estimation $\alpha - 1 \asymp 1/(w \log w \log_2 x)$ implique que $\alpha = \exp\{O(k\mathcal{E})\}$.

Enfin, la formule de Stirling fournit $W(k)W(\varrho) \asymp 1 = \exp\{O(k\mathcal{E})\}$ pour $k \geqslant (\log_2 x)^{1+\eta}$.

Il découle donc de ces estimations et du Théorème 2 que l'on a

$$\pi_k(x) = \bigg(\frac{x\mathrm{e}^k}{\big(S(\beta)\log x\big)^k}\bigg)^\beta \exp\{O(k\mathcal{E})\}.$$

Le résultat du Corollaire 7 est donc établi. □

7.2. Démonstration du Corollaire 5

Comme dans le cas du Corollaire 4, nous démontrons un résultat plus précis que le Corollaire 5. Rappelons que $\mathcal{E}$ a été défini par (4·29) et qu'il vérifie $\mathcal{E} \ll (\log_2 x)^{-1/4}$.

Corollaire 8. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour x assez grand et $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$, on a*

$$\frac{\pi_{k+1}(x)}{\pi_k(x)} = \frac{1 + O(\mathcal{E})}{\kappa_1(\beta)\big(S(\beta)\log x\big)^\beta}. \tag{7·11}$$

En particulier, on a

$$\frac{\pi_{k+1}(x)}{\pi_k(x)} \asymp \Big(\frac{\log w}{k}\Big)^\beta. \tag{7·12}$$

Démonstration. Pour $k \leqslant (\log_2 x)^{12}$, (3·11) implique (7·11).

Supposons dorénavant que $k \geqslant (\log_2 x)^{12}$ et évaluons le quotient

$$Q = \frac{x^{\alpha_1} \varrho_1^{-k-1} F(\varrho_1, \alpha_1)}{x^{\alpha} \varrho^{-k} F(\varrho, \alpha)} \tag{7·13}$$

où ϱ_1 et α_1 sont les solutions du système (3·8) avec $k+1$ à la place de k.

Pour x fixé, on peut considérer $\alpha = \alpha(k)$ et $\varrho = \varrho(k)$ comme des fonctions de k, et prolonger ces applications sur $[k, k+1]$ de sorte que $m \mapsto \alpha(m)$ et $m \mapsto \varrho(m)$ soient solutions de (3·8) avec $m \in [k, k+1]$ à la place de k et soient de classe $\mathcal{C}^1$. De même, on note $\beta(m)$ la valeur de β où k est remplacé par m. Le logarithme du quotient (7·13) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\log Q &= \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m} \big\{ - m \log \varrho(m) + \alpha(m) \log x + f\big(\varrho(m), \alpha(m)\big) \big\} \,\mathrm{d}m \\
&= \int_k^{k+1} \Big(- \log \varrho(m) - \frac{m \varrho'(m)}{\varrho(m)} + \alpha'(m) \log x + f_z\big(\varrho(m), \alpha(m)\big) \varrho'(m) \\
&\qquad + f_s\big(\varrho(m), \alpha(m)\big) \alpha'(m) \Big) \mathrm{d}m \\
&= - \int_k^{k+1} \log \varrho(m) \,\mathrm{d}m
\end{aligned}$$

car $f_z\big(\varrho(m), \alpha(m)\big) = -m/\varrho(m)$ et $f_s\big(\varrho(m), \alpha(m)\big) = -\log x$. Avec (4·27), l'expression précédente devient

$$\log Q = - \int_k^{k+1} \beta(m) \log \big\{ S\big(\beta(m)\big) \log x \big\} \,\mathrm{d}m - \int_k^{k+1} \log \big\{ \kappa_1\big(\beta(m)\big) \big\} \,\mathrm{d}m + O(\mathcal{E}).$$

On remarque alors que pour $m \in [k, k+1]$, on a

$$\beta(m) - 1 = (\beta - 1) \Big\{ 1 + O\Big(\frac{w}{k(w-1)} \Big) \Big\},$$

$$S\big(\beta(m)\big) = S(\beta) \Big\{ 1 + O\Big(\frac{w}{k(w-1)} \Big) \Big\}$$

et

$$\log \big\{ \kappa_1\big(\beta(m)\big) \big\} = \log \kappa_1(\beta) + O\Big(\frac{w}{k(w-1)} \Big)$$

donc

$$\begin{aligned}
\beta(m) \log \big\{ S\big(\beta(m)\big) \log x \big\} &= \beta \log \big(S(\beta) \log x \big) + O\Big(\frac{w\{1 + (\beta - 1) \log_2 x\}}{k(w-1)} \Big) \\
&= \beta \log \big(S(\beta) \log x \big) + O\Big(\frac{w^2}{k(w-1)^2} \Big).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\log Q &= - \beta \log \big(S(\beta) \log x \big) - \log \kappa_1(\beta) + O\Big(\mathcal{E} + \frac{w^2}{k(w-1)^2} \Big) \\
&= - \beta \log \big(S(\beta) \log x \big) - \log \kappa_1(\beta) + O(\mathcal{E}).
\end{aligned}$$

Donc, d'après (6·2), on a, pour $k \geqslant (\log_2 x)^{12}$,

$$\frac{\pi_{k+1}(x)}{\pi_k(x)} = \frac{1}{\kappa_1(\beta)\big(S(\beta)\log x\big)^\beta} \frac{\alpha(k)\sqrt{\delta(k)}}{\alpha(k+1)\sqrt{\delta(k+1)}}\{1 + O(\mathcal{E})\}.$$

Grâce aux Propositions 7 et 8, on constate que

$$\frac{\alpha(k)\sqrt{\delta(k)}}{\alpha(k+1)\sqrt{\delta(k+1)}} = 1 + O\Big(\frac{w^3}{k(w-1)^2}\Big)\cdot$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\pi_{k+1}(x)}{\pi_k(x)} = \frac{1}{\kappa_1(\beta)\big(S(\beta)\log x\big)^\beta}\{1 + O(\mathcal{E})\}.$$

On a ainsi démontré (7·11).

En notant que $\kappa_1(\beta) \asymp 1$, $S(\beta) \asymp \beta - 1 \asymp k/(\log w \log x)$ et $\beta \ll 1$, on déduit de (7·11) que

$$\frac{\pi_{k+1}(x)}{\pi_k(x)} \asymp \Big(\frac{\log w}{k}\Big)^\beta,$$

ce qui achève notre démonstration. □

7.3. Démonstration du Corollaire 6

Là encore, nous démontrons un résultat plus précis que le Corollaire 6. Rappelons que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{E}$ ont été définis par (4·28) et (4·29) et qu'ils vérifient $\mathcal{R} \ll (\log_3 x/\log_2 x)^{1/2}$ et $\mathcal{E} \ll (\log_2 x)^{-1/4}$.

Corollaire 9. *Soit $\varepsilon, \varepsilon' > 0$. On a, uniformément pour x assez grand, $1 \leqslant k \leqslant K_{x,\varepsilon}$ et $k \leqslant K_x - \varepsilon'(\log\lambda)/\log_2 x$,*

$$\frac{\pi_k(\lambda x)}{\lambda\pi_k(x)} = \Big(\frac{\log(\lambda x)}{\log x}\Big)^{(\beta-1)\log x - 1} \exp\Big\{O_{\varepsilon,\varepsilon'}\Big(\mathcal{E} + \mathcal{R}\frac{k\log\lambda}{(\log w)\log x}\Big)\Big\}\cdot \tag{7·14}$$

Démonstration. Lorsque $k \ll (\log_2 x)^{12}$, l'estimation (3·12) implique (7·14). Supposons dorénavant que $k \gg (\log_2 x)^{12}$. Remarquons que les hypothèses impliquent que $\lambda \leqslant x^{O(1-v)}$.

Fixons k et considérons α, ϱ, δ, w, β, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{E}$ comme des fonctions de la variable x. Nous adoptons les notations $\alpha = \alpha(x)$, $\varrho = \varrho(x)$, $\delta = \delta(x)$, $w = w(x)$, $\beta = \beta(x)$, $\alpha_1 = \alpha(\lambda x)$, $\varrho_1 = \varrho(\lambda x)$, $\delta_1 = \delta(\lambda x)$, $w_1 = w(\lambda x)$ et $\beta_1 = \beta(\lambda x)$. D'après (6·2), on a

$$\frac{\pi_k(\lambda x)}{\lambda\pi_k(x)} = \frac{Q_1Q_2Q_3}{\lambda}\Big\{1 + O_\varepsilon\Big(\frac{(\log_2 x)^5}{\sqrt{k}}\Big)\Big\} \tag{7·15}$$

avec

$$Q_1 := \frac{\varrho_1^{-k}x^{\alpha_1}F(\varrho_1,\alpha_1)}{\varrho^{-k}x^\alpha F(\varrho,\alpha)}, \qquad Q_2 = \frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \text{et} \qquad Q_3 = \sqrt{\frac{\delta}{\delta_1}}\cdot$$

Commençons par évaluer le quotient Q_1. On constate aisément que

$$\log Q_1 = \int_x^{\lambda x} \alpha(u)\frac{\mathrm{d}u}{u} = \log\lambda + \int_x^{\lambda x} \big(\alpha(u) - 1\big)\frac{\mathrm{d}u}{u}\cdot$$

On a, uniformément pour $x \leqslant u \leqslant \lambda x$,

$$w(u) = \Big(1 + \frac{\log \lambda}{\log x}\Big) w \Big\{1 + O\Big(\frac{\log \lambda}{(\log x)\log_2 x}\Big)\Big\} \asymp w. \tag{7·16}$$

Par conséquent, uniformément pour $x \leqslant u \leqslant \lambda x$, on a $\mathcal{R}(u) \asymp \mathcal{R}$ et donc, d'après (4·26), $\alpha(u) - 1 = \big(\beta(u) - 1\big)\{1 + O(\mathcal{R})\}$. Alors

$$\int_x^{\lambda x} \big(\alpha(u) - 1\big) \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_x^{\lambda x} \big(\beta(u) - 1\big) \frac{\mathrm{d}u}{u} \{1 + O(\mathcal{R})\}.$$

Il découle également de (7·16) que l'on a, uniformément pour $x \leqslant u \leqslant \lambda x$,

$$\big(\beta(u) - 1\big) \log u = (\beta - 1)(\log x)\Big\{1 + O\Big(\frac{\log \lambda}{(\log w)\log x}\Big)\Big\},$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_x^{\lambda x} \big(\beta(u) - 1\big) \frac{\mathrm{d}u}{u} &= (\beta - 1)(\log x) \int_x^{\lambda x} \frac{\mathrm{d}u}{u \log u} \Big\{1 + O\Big(\frac{\log \lambda}{(\log w)\log x}\Big)\Big\} \\ &= (\beta - 1)(\log x) \log\Big(\frac{\log(\lambda x)}{\log x}\Big)\Big\{1 + O\Big(\frac{\log \lambda}{(\log w)\log x}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu

$$Q_1 = \lambda \Big(\frac{\log(\lambda x)}{\log x}\Big)^{(\beta - 1)\log x} \exp\Big\{O\Big(\frac{k \log \lambda}{(\log w)\log x}\Big(\mathcal{R} + \frac{\log \lambda}{(\log w)\log x}\Big)\Big)\Big\}. \tag{7·17}$$

D'après la Proposition 7, on a

$$Q_2 = \frac{\beta}{\beta_1}\Big\{1 + O\Big(\mathcal{R}\frac{k}{(\log w)\log x}\Big)\Big\}$$

et d'après (7·16), on a

$$\beta_1 = \beta\Big\{1 + O\Big(\frac{k}{(\log w)\log x}\frac{w \log \lambda}{(w - 1)\log x}\Big)\Big\}.$$

Il s'ensuit que

$$Q_2 = 1 + O\Big(\frac{k}{(\log w)\log x}\Big(\mathcal{R} + \frac{w \log \lambda}{(w - 1)\log x}\Big)\Big). \tag{7·18}$$

Enfin, d'après la Proposition 8, on a

$$Q_3 = \sqrt{\frac{1 - S(\beta)^2}{\beta^2 S(\beta)^2}\frac{\beta_1^2 S(\beta_1)^2}{1 - S(\beta_1)^2}}\sqrt{\frac{H'(w_1)}{H'(w)}}\{1 + O(\mathcal{E})\}$$

donc

$$Q_3 = \frac{\log x}{\log(\lambda x)}\Big\{1 + O\Big(\mathcal{E} + \frac{\log \lambda}{(\log w)\log x}\Big)\Big\}. \tag{7·19}$$

En combinant (7·15), (7·17), (7·18) et (7·19) et en remarquant que, pour $\lambda \leqslant x^{O(1-v)}$,

$$\frac{k\mathcal{R}}{(\log w)\log x} \ll \frac{k\mathcal{R}\log \lambda}{(\log w)\log x}$$

et

$$\frac{k(\log \lambda)^2}{(\log w)^2(\log x)^2} \ll \frac{wk \log \lambda}{(w - 1)(\log w)(\log x)^2} \ll \frac{\log \lambda}{(\log w)\log x},$$

on obtient (7·14). □

8. Démonstration de la Proposition 2

Nous présentons ici la démonstration [12] de la proposition 2. Nous tenons à remercier Michel Balazard de nous avoir communiquer sa démonstration.

Posons

$$\Pi_k(x) = \{n \leqslant x : \omega(n) = k\}.$$

Nous allons construire une injection de $\Pi_k(x)$ dans $\Pi_{k-1}(x)$. Pour cela, nous utiliserons plusieurs lemmes.

Lemme 19. *Il existe une injection i de l'ensemble des parties de $E = \{1, 2, \ldots, 2j+1\}$ ayant au moins $j+1$ éléments dans l'ensemble des parties de E, telle que si $A \subset E$ et $|A| \geqslant j+1$ alors $i(A)$ s'obtient en enlevant un élément de A.*

Démonstration. Cela résulte de la solution du « problèmes des mariages », comme l'ont montré Erdős et Nicolas dans [16] (Proposition 6). □

Lemme 20. *Pour $k = 2, 3, \ldots$, soit $j(k)$ un nombre entier vérifiant $1 \leqslant j(k) \leqslant k$. Définissons $f(k)$ récursivement par $f(1) = 2$ et, pour $k \geqslant 2$,*

$$f(k) = \min\{(p_1 \ldots p_{k-j})^2 p_{k-j+1} \ldots p_k - 1, f(k-1)p_{2j+2}\} \qquad \text{où} \qquad j = j(k).$$

Alors il existe une injection i_k de $\Pi\big(f(k), k\big)$ dans $\Pi\big(f(k), k-1\big)$ associant à tout nombre de $\Pi\big(f(k), k\big)$ l'un de ses diviseurs.

Démonstration. C'est vrai pour $k = 1$. Supposons, pour $k \geqslant 2$, l'existence d'une injection i_{k-1} de $\Pi\big(f(k-1), k-1\big)$ dans $\Pi\big(f(k-1), k-2\big)$ telle que, pour tout $n \in \Pi\big(f(k-1), k-1\big)$, $i_{k-1}(n) \,|\, n$. Montrons que l'on peut construire i_k.

Tout entier positif n s'écrit de manière unique $n = qd$ où $\mu(q)^2 = 1$, $p \,|\, d \Rightarrow p^2 \,|\, d$ et $(q, d) = 1$.

Si $n \in \Pi\big(f(k), k\big)$ alors $\omega(q) \geqslant j+1$ sinon $k-j$ facteurs premiers de n apparaissent avec un exposant supérieur ou égal à 2 et $n \geqslant p_1 \ldots p_k p_1 \ldots p_{k-j} > f(k)$. Deux cas se présentent alors : Si $P^+(q) \leqslant p_{2j+1}$, on définit $i_k(n)$ au moyen de l'injection du Lemme 19, en enlevant à q l'un de ses diviseurs premiers. Si $P^+(q) > p_{2j+1}$, on définit $i_k(n) = P^+(p) i_{k-1}\big(n/P^+(p)\big)$, ce qui est possible car $n/P^+(q) \leqslant f(k-1)$ et $\omega\big(n/P^+(q)\big) = k-1$.

Si on fait l'hypothèse supplémentaire que $i_{k-1}(m)$ et m ont la même partie « squarefull » (c'est vrai pour i_1), on vérifie facilement que i_k est une injection ayant les mêmes propriétés que i_{k-1}. □

L'injection i_k induit une injection de $\Pi\big(x, k\big)$ dans $\Pi\big(x, k-1\big)$ pour tout $x \leqslant f(k)$, ce qui prouve que $\pi_k(x) \leqslant \pi_{k-1}(x)$ si $x \leqslant f(k)$.

Nous allons maintenant choisir $j(k)$ pour que $f(k)$ soit le plus grand possible.

Lemme 21. *Si*

$$j(k) = \left[k - k\frac{\log 2}{\log k}\right] + 1,$$

on a

$$f(k) = \exp\left\{k\big(\log k + \log_2 k - 1 + \log 2 + o(1)\big)\right\}.$$

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème des nombres premiers sous la forme

$$\begin{aligned}\vartheta(p_n) &= p_n + O\big(p_n \mathrm{e}^{-\sqrt{\log p_n}}\big)\\ &= n\Big\{\log n + \log_2 n - 1 + O\Big(\frac{\log_2 n}{\log n}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Nous commençons en obtenant une formule asymptotique pour la quantité

$$(p_1 \dots p_{k-j})^2 p_{k-j+1} \dots p_k - 1 = \exp\{\vartheta(p_k) + \vartheta(p_{k-j})\} - 1,$$

où $j = j(k)$. Nous avons

$$\begin{aligned}\vartheta(p_k) + \vartheta(p_{k-j}) &= k\Big\{\log k + \log_2 k - 1 + O\Big(\frac{\log_2 k}{\log k}\Big)\Big\}\\ &\qquad + \Big\{k\frac{\log 2}{\log k} + O(1)\Big\}\{\log k + O(\log_2 k)\}\\ &= k\Big\{\log k + \log_2 k - 1 + \log 2 + O\Big(\frac{\log_2 k}{\log k}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Définissons maintenant $A(k)$ et $B(k)$ par les formules

$$f(k) = \exp\Big\{k\Big(\log k + \log_2 k - 1 + \log 2 + A(k)\frac{\log_2 k}{\log k}\Big)\Big\}$$

et

$$(p_1 \dots p_{k-j})^2 p_{k-j+1} \dots p_k - 1 = \exp\Big\{k\Big(\log k + \log_2 k - 1 + \log 2 + B(k)\frac{\log_2 k}{\log k}\Big)\Big\},$$

de sorte que $A(k) \leqslant B(k)$ et, d'après ce qui précède, $B(k) = O(1)$. Il nous suffit, pour conclure, de montrer que $A(k) = O(1)$.

Soient $k_1 < k_2 < \cdots$ les valeurs de k pour lesquelles on a

$$(p_1 \dots p_{k-j})^2 p_{k-j+1} \dots p_k - 1 \leqslant f(k-1) p_{2j+2}.$$

On a $A(k_i) = B(k_i) = O(1)$. Montrons que si $k_i < k < k_{i+1}$, $A(k)$ reste borné. Pour une telle valeur de k, on a $f(k) = f(k-1)p_{2j+2}$, donc

$$\begin{aligned}&k\Big(\log k + \log_2 k - 1 + \log 2 + A(k)\frac{\log_2 k}{\log k}\Big)\\ &= (k-1)\Big(\log(k-1) + \log_2(k-1) - 1 + \log 2 + A(k-1)\frac{\log_2(k-1)}{\log(k-1)}\Big)\\ &\qquad \times \Big\{\log k + \log_2 k + \log 2 + O\Big(\frac{\log_2 k}{\log k}\Big)\Big\},\end{aligned}$$

d'après la formule asymptotique

$$\log p_n = \log n + \log_2 n + O\Big(\frac{\log_2 n}{\log n}\Big).$$

Tous calculs faits, on aboutit à

$$A(k)k\frac{\log_2 k}{\log k} - A(k-1)(k-1)\frac{\log_2(k-1)}{\log(k-1)} = O\Big(\frac{\log_2 k}{\log k}\Big)$$

d'où, après sommation,

$$A(k)k\frac{\log_2 k}{\log k} - A(k_i)k_i\frac{\log_2 k_i}{\log k_i} = O\Big(\sum_{\ell=k_i+1}^{k}\frac{\log_2 \ell}{\log \ell}\Big),$$

ce qui prouve bien que $A(k) = O(1)$. □

Pour terminer la démonstration de la proposition, un calcul simple montre que, pour $\varepsilon_0 < \log 2$, on a $x \leqslant f(k)$ si $x \geqslant x_0(\varepsilon_0)$ et $k \geqslant K_{x,\varepsilon_0}$.

Annexe 1

Posons, pour $\lambda > 0$ et $a > 0$,

$$\Delta(\lambda, a) := \int_\lambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u - \int_\lambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{(u^2+a^2)^{1/2}}\mathrm{d}u.$$

Lemme 22. *Soit* $a > 0$. On a, uniformément pour $0 < \lambda \ll 1$,

$$\Delta(\lambda, a) \gg_a \log(1 + 1/\lambda). \tag{8·1}$$

Démonstration. Pour $0 < \lambda \ll 1$, on a

$$\int_\lambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{(u^2+a^2)^{1/2}}\mathrm{d}u \ll_a 1$$

et, par intégration par parties,

$$\int_\lambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u = \log\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)\{1 + O(\lambda)\}.$$

Donc

$$\Delta(\lambda, a) \sim \log\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) \qquad (\lambda \to 0)$$

ce qui démontre (8·1) pour $\lambda \leqslant \lambda_0$ où λ_0 est assez petit.

Lorsque $\lambda_0 \leqslant \lambda \ll 1$, on a $\Delta(\lambda, a) \geqslant \Delta(\lambda_0, a)$ et $\log(1 + 1/\lambda) \ll 1$ donc $\Delta(\lambda, a) \gg_a \log(1 + 1/\lambda)$. On a ainsi démontré (8·1) pour $\lambda \ll 1$. □

Lemme 23. On a, uniformément pour $a > 0$ et $\lambda \geqslant 4$,

$$\Delta(\lambda, a) \gg \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\min\{1\,;\, a^2/\lambda^2\} \asymp \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}a^2}{\lambda(a^2+\lambda^2)}. \tag{8·2}$$

Démonstration. Par intégrations par parties, on a

$$\int_\lambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda^2} + 2\int_\lambda^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^3\,\mathrm{e}^u}$$

et

$$\int_\lambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{(u^2+a^2)^{1/2}}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\Big\{\frac{1}{(1+a^2/\lambda^2)^{1/2}} - \frac{1}{\lambda}\frac{1}{(1+a^2/\lambda^2)^{3/2}}\Big\} + \int_\lambda^{+\infty} \frac{(2u^2-a^2)\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^{5/2}\,\mathrm{e}^u}.$$

Or

$$2\int_\lambda^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\,\mathrm{e}^u} - \int_\lambda^{+\infty} \frac{(2u^2-a^2)\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^{5/2}\,\mathrm{e}^u} \geqslant 2\int_\lambda^{+\infty} \frac{1}{u^3\,\mathrm{e}^u}\Big(1 - \frac{1}{(1+a^2/u^2)^{5/2}}\Big)\mathrm{d}u \geqslant 0$$

donc

$$\Delta(\lambda, a) \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\Big\{1 - \frac{1}{(1+a^2/\lambda^2)^{1/2}} - \frac{1}{\lambda}\Big(1 - \frac{1}{(1+a^2/\lambda^2)^{3/2}}\Big)\Big\}.$$

Si $a/\lambda \longrightarrow 0$, on a

$$1 - \frac{1}{(1+a^2/\lambda^2)^{1/2}} - \frac{1}{\lambda}\Big(1 - \frac{1}{(1+a^2/\lambda^2)^{3/2}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{3}{\lambda}\Big)\frac{a^2}{\lambda^2} + O\Big(\frac{a^4}{\lambda^4}\Big)$$

donc, pour $a/\lambda \longrightarrow 0$ et $\lambda > 4$,

$$1 - \frac{1}{(1+a^2/\lambda^2)^{1/2}} - \frac{1}{\lambda}\Big(1 - \frac{1}{(1+a^2/\lambda^2)^{3/2}}\Big) \gg \frac{a^2}{\lambda^2}.$$

La minoration (8·2) en découle dans ce cas.

Si $a/\lambda \gg 1$, on a

$$1 - \frac{1}{(1+a^2/\lambda^2)^{1/2}} - \frac{1}{\lambda}\Big(1 - \frac{1}{(1+a^2/\lambda^2)^{3/2}}\Big) \gg 1$$

donc (8·2) est également vérifiée dans ce cas. □

Bibliographie

[11] K. Alladi, The distribution of $\nu(n)$ in the sieve of Erathosthenes, *Quart. J. Math. Oxford*, **33** 2 (1982), 129—148.

[12] M. Balazard, Décroissance de la loi locale de ω pour les très grandes valeurs du paramètre, *Communication privée.*

[13] M. Balazard, Unimodalité de la distribution du nombre de diviseurs premiers d'un entier, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **40** 2 (1990), 255—270.

[14] M. Balazard, Quelques exemples de suites unimodales en théorie analytique des nombres, *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux* **2** (1990), 13—20.

[15] P. Erdős, On the integers having exactly K primes factors, *Ann. Math.* **49** 2 (1948), 53—66.

[16] P. Erdős & J. L. Nicolas, Méthodes probabilistes et combinatoires en théorie des nombres, *Bull. Sci. Math.* **100** 2 (1976), 301—320.

[17] G. H. Hardy & S. Ramanujan, The normal number of prime factors of a number n, *Quart. J. Math.* **48** (1917), 76—92.

[18] D. Hensley, The distribution of round numbers, *Proc. London Math. Soc.* **54** 3 (1987), 412—444.

[19] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On the number of prime factors of an integer, *Duke Mathematical Journal* **56** 3 (1988), 471—501.

[20] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen,* Vol. 1, Leipzig (1909).

[21] C. Pomerance, « On the distribution of round numbers » in *Number Theory, K. Alladi (Ed.), Proc. Ootacamund, India* (1984), 173—200, Springer Lecture Notes 1122.

[22] L.G. Sathe, On a problem of Hardy and Ramanujan on the distribution of integers having a given number of prime factors, *J. Indian Math. Soc.* **17** (1953), 63—141 ; **18** (1954), 27—81.

[23] A. Selberg, Note on a paper by L. G. Sathe, *J. Indian Math. Soc.* **18** (1954), 83—87.

[24] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, seconde éd., Cours spécialisés numéro 1, Soc. Math. France (1995).

Sur la répartition divisorielle normale de $\vartheta d \pmod 1$

Sébastien Kerner

Sommaire

9. Introduction

Nous dirons d'une propriété portant sur les nombres entiers qu'elle est vérifiée pp (presque partout) si elle est satisfaite sur un ensemble d'entiers $\mathcal{A}$ de densité naturelle d$\mathcal{A}$ égale à l'unité, c'est-à-dire

$$\mathrm{d}\mathcal{A} := \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\big|\mathcal{A}\cap[1,x]\,\big| = 1.$$

On dit alors de cette propriété qu'elle est normale.

Nous nous proposons d'établir dans ce travail un résultat de « bonne » répartition des diviseurs d'un entier normal (on notera au passage le double caractère probabiliste du problème : répartition stochastique des entiers et de leurs diviseurs). La notion sous-jacente étudiée ici est celle de suite de Behrend. On dit qu'une suite d'entiers naturels $\mathcal{B}$ est une suite de Behrend si

$$\tau(n,\mathcal{B}) := |\{d\,|\,n : d\in\mathcal{B}\}| \geqslant 1 \qquad \text{(pp)}.$$

Commençons par énoncer notre problème. Nous verrons plus loin comment il est apparenté avec la notion de suite de Behrend.

Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. S'il n'y a pas *a priori* de raison structurelle évidente pour que les nombres $f(d)$, $d\,|\,n$, aient une répartition modulo 1 particulière, un raisonnement heuristique d'équirépartition modulo 1 conduit à conjecturer que l'on a

$$\min_{d\,|\,n} \|f(d)\| = \frac{1}{\tau(n)^{1+o(1)}} \qquad \text{(pp)},$$

où la notation $\|u\|$ désigne la distance de u à l'ensemble des entiers naturels.

Dans le cas où $f(d) = (\log d)^\alpha$, Mendès France & Tenenbaum [36] (pour la minoration) et Tenenbaum [40] (pour la majoration) ont démontré que, pour les nombres réels $\alpha \geqslant 1-\log 2$ tels que $\{(\log d)^\alpha : d>1\}\cap\mathbb{N} = \varnothing$,(11) on a

$$\min_{d\,|\,n,\,d>1} \|(\log d)^\alpha\| = \frac{1}{\tau(n)^{1+o(1)}} \qquad \text{(pp)}.$$

Le résultat est donc en accord avec les énoncés classiques d'équirépartition modulo 1 que l'on peut obtenir pour les suites à croissances polynomiales. On profite, dans ce cas, de la répartition probabiliste des entiers normaux. Cependant, il est raisonnable d'espérer mieux dans ce type de problème. En plus du caractère probabiliste lié à la normalité des entiers considérés, la répartition aléatoire des diviseurs de ces entiers permet d'envisager des résultats pour des suites à croissance beaucoup plus rapide que polynomiale. Ainsi, alors que l'équirépartition modulo 1 de la suite géométrique $(3/2)^n$ semble aujourd'hui hors d'atteinte, Tenenbaum a obtenu ([41] théorème 11) un résultat pour la fonction $h_\alpha(d) = d^\alpha$, dont la croissance (comparable à $j \longmapsto \exp(j^{\alpha/\log 2})$) est exponentielle sur les diviseurs. Son résultat énonce que, dans le cas d'un nombre réel $\alpha>0$ non entier, on a

$$\min_{d\,|\,n,\,d>1} \|d^\alpha\| \leqslant 1/\tau(n)^\delta \qquad \text{(pp)}$$

dès que $\delta < \log(12/11)/\log 4$.

11. Lorsque $\alpha < 1-\log 2$, le résultat devient faux. Pour plus de précisions, voir [39].

Nous considérons dans ce travail une autre suite à croissance exponentielle sur les diviseurs : la suite $g_\vartheta(d) = \vartheta d$ où ϑ désigne un nombre irrationnel. Si ϑ possède suffisamment de bonnes approximations rationnelles, le raisonnement heuristique d'équirépartition modulo 1 nous amène à conjecturer que

$$\min_{d\,|\,n} \|\vartheta d\| = \frac{1}{\tau(n)^{1+o(1)}} \qquad \text{(pp)}.$$

Il existe déjà un résultat lié à cette fonction g_ϑ. Le Corollaire 9 de [41] et la remarque qui le suit fournissent, pour ϑ appartenant à un certain ensemble $\mathcal{F}$ contenant les irrationnels algébriques,

$$\text{(9·1)} \qquad \frac{1}{\tau(n)^{1+o(1)}} \leqslant \min_{d\,|\,n} \|\vartheta d\| \leqslant \frac{1}{\tau(n)^{1-(\log 3)/\log 4+o(1)}} \qquad \text{(pp)}.$$

Nous nous proposons de remplacer la constante $\log 3/\log 4$ dans la majoration ci-dessus par $o(1)$, pour un ensemble très vaste de valeurs de ϑ.

Pour chaque nombre réel ϑ, nous désignons par $\{p_j(\vartheta)/q_j(\vartheta)\}_{j\geqslant 1}$ la suite des réduites de ϑ (ou bien $\{p_j/q_j\}_{j\geqslant 1}$ lorsqu'il n'y a pas risque de confusion). Nous introduisons alors l'ensemble $\mathcal{E}$ des nombres irrationnels ϑ pour lesquels

$$\text{(9·2)} \qquad \log q_{j+1}(\vartheta) \leqslant \{\log q_j(\vartheta)\}^{1+o(1)} \qquad (j \to +\infty).$$

Le théorème 31 de [33][12] permet de justifier immédiatement que le complémentaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ est négligeable au sens de Lebesgue. En fait, bien que cela ne soit pas énoncé dans le théorème 31 de [33], le résultat obtenu au cours de la démonstration est sensiblement meilleur : le complémentaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ est de mesure de Hausdorff nulle.

Par ailleurs, il découle aisément du critère de Liouville que tous les nombres algébriques appartiennent à $\mathcal{E}$. En effet, si ϑ est un nombre irrationnel n'appartenant pas à $\mathcal{E}$, il existe un nombre réel $\eta > 0$ et une sous-suite $\{j_\ell\}_{\ell\geqslant 0}$ des entiers naturels tels que, pour tout $\ell \geqslant 0$, $\log q_{j_\ell+1} > (\log q_{j_\ell})^{1+\eta}$ et donc aussi

$$\left|\vartheta - \frac{p_{j_\ell}}{q_{j_\ell}}\right| < \frac{1}{q_{j_\ell} q_{j_\ell+1}} < \frac{1}{(q_{j_\ell})^{1+(\log q_{j_\ell})^\eta}}.$$

Si $N \in \mathbb{N}$, il existe $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $\ell \geqslant \ell_0$, on ait $1 + (\log q_{j_\ell})^\eta \geqslant N$. Alors

$$\left|\vartheta - \frac{p_{j_\ell}}{q_{j_\ell}}\right| < \frac{1}{(q_{j_\ell})^N} \qquad (\ell \geqslant \ell_0).$$

Selon le critère de Liouville, le nombre réel ϑ est donc de degré au moins N. Puisque N est arbitrairement grand, nous en déduisons que ϑ est transcendant et, par suite, que $\mathcal{E}$ contient nécessairement tous les nombres algébriques.

Nous pouvons alors énoncer notre résultat principal.

Théorème 1. *Pour tous les nombres ϑ de l'ensemble $\mathcal{E}$, on a*

$$\min_{d\,|\,n} \|d\vartheta\| = \frac{1}{\tau(n)^{1+o(1)}} \qquad \text{(pp)}.$$

La méthode que nous employons pour démontrer ce théorème est susceptible de fournir l'ordre de grandeur du $o(1)$. Nous nous sommes cantonnés à l'énoncé ci-dessus pour éviter les notables complications techniques nécessaires à cette généralisation.

L'ensemble $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{E}$. La minoration contenue dans ce théorème est donc une conséquence de (9·1). La preuve développée de cette minoration figurera dans l'article [32].

12. Pour un résultat plus précis, on peut consulter [34].

Le corollaire suivant résulte sans difficulté du théorème 1.

Corollaire 1. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Pour* $\vartheta \in \mathcal{E}$, *l'ensemble*

$$\mathcal{B}(\vartheta, \varepsilon) := \{n \geqslant 2 : \|\vartheta n\| \leqslant \tau(n)^{-1+\varepsilon}\}$$

est une suite de Behrend.

10. Moments de $L(1, \chi; y)$

Soient χ un caractère de Dirichlet de module q, s un nombre complexe et y un nombre réel $\geqslant 2$. Posons, pour $\sigma = \mathrm{Re}\, s > 0$,

$$L(s, \chi; y) := \sum_{P^+(n) \leqslant y} \frac{\chi(n)}{n^s}. \tag{10·1}$$

Nous désignons par χ_0 le caractère principal modulo q.

L'énoncé suivant fournit, pour tout $b \geqslant 1$, une majoration uniforme en y de $|L(1, \chi; y)|^b$ en moyenne sur les caractères non principaux. Ce résultat nous servira pour établir la majoration contenue dans le théorème 1.

Théorème 2. *Soit* $b \geqslant 1$. *On a pour* $q \geqslant 2$, $y \geqslant 2$,

$$\sum_{\substack{\chi (\mathrm{mod}\, q) \\ \chi \neq \chi_0}} |L(1, \chi; y)|^b \ll \varphi(q) (\log_2 2q)^b. \tag{10·2}$$

Plus précisément, on a sous les mêmes hypothèses

$$\sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} |L(1, \chi; y)|^b \ll \varphi(q) \left\{1 + \frac{(\log y)^b (\log_2 2q)^b}{(\log q)^b}\right\} \tag{10·3}$$

et

$$\sum_{\substack{\chi (\mathrm{mod}\, q) \\ \chi \neq \chi_0}} |L(1, \chi; y)|^b \ll \varphi(q) \left\{1 + \frac{(\log q)^b (\log_2 2q)^b}{(\log y)^b}\right\}. \tag{10·4}$$

Démonstration. Montrons d'abord (10·3). Nous notons que, pour tout $c > 0$,

$$L(1, \chi; y)^c = \sum_{P^+(n) \leqslant y} \frac{\tau_c(n) \chi(n)}{n}$$

où τ_c est la fonction de Piltz d'indice c. Soit $z := \min\big(y, 2q^{1/(\log_2 2q)}\big)$. On a alors, en vertu d'estimations classiques sur le cardinal des entiers friables,

$$\sum_{\substack{n > q \\ P^+(n) \leqslant z}} \frac{|\tau_c(n)|}{n} \ll 1. \tag{10·5}$$

Dans le cas $c = 1$, cette majoration découle aisément, par exemple, de l'évaluation obtenue à la fin de la preuve du Corollaire 2 de [38]. On obtient même que le membre de gauche est $\ll 1/(\log z)^{d^2}$ pour tout nombre réel $d > 0$. Le cas général s'en déduit, grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz, compte tenu de la majoration

$$\sum_{P^+(n)\leqslant z} \frac{\tau_c(n)^2}{n} \ll (\log z)^{c^2}.$$

De plus,

$$L(1,\chi;y) = L(1,\chi;z) \prod_{z<p\leqslant y} \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p}\Big)^{-1} \ll L(1,\chi;z)\frac{\log y}{\log z}\cdot$$

On obtient donc

$$\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)} |L(1,\chi;y)|^b \ll \Big(\frac{\log y}{\log z}\Big)^b \sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)} |L(1,\chi;z)^{b/2}|^2.$$

Or on a, d'après (10·5),

$$\begin{aligned}\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)} |L(1,\chi;z)^{b/2}|^2 &\ll \sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)} \Bigg\{1 + \Bigg|\sum_{\substack{P^+(n)\leqslant z\\ n\leqslant q}} \frac{\chi(n)\tau_{b/2}(n)}{n}\Bigg|^2\Bigg\}\\ &\ll \varphi(q)\Bigg\{1 + \sum_{\substack{P^+(n)\leqslant z\\ n\leqslant q}} \frac{\tau_{b/2}(n)^2}{n^2}\Bigg\} \ll \varphi(q).\end{aligned}$$

Montrons maintenant (10·4). Étant donnée une constante absolue C assez grande pour que $\prod_{\chi\neq\chi_0} L(s,\chi)$ ait au plus un zéro dans la région $\sigma > 1 - 18/\{C\log((1+|\tau|)q)\}$, nous posons

$$Z := \max(y, q^{C\log_2 2q}).$$

Convenons que $\vartheta(\chi) = 1$ si χ est le caractère exceptionnel de Siegel et que $\vartheta(\chi) = 0$ dans le cas contraire. On déduit du lemme 6.3 de [28] que, pour chaque caractère non principal de module q, on a

$$L(1,\chi;Z) \ll L(1,\chi)\Big\{1 + \vartheta(\chi)\widehat{\omega}\big((1-\beta)\log Z\big)\Big\}$$

où

$$\widehat{\omega}(s) := -1 + \frac{1}{s}\exp\Big\{-\gamma + \int_0^s (1-\mathrm{e}^{-v})\frac{\mathrm{d}v}{v}\Big\}$$

est la transformée de Laplace de la fonction de Buchstab. On a clairement

$$1 + \widehat{\omega}(s) \ll \frac{1+s}{s} \qquad (s > 0).$$

On peut donc écrire, en notant χ_1 l'éventuel caractère exceptionnel,[13]

$$\sum_{\substack{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)\\ \chi\neq\chi_0}} |L(1,\chi;Z)|^b \ll \sum_{\substack{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)\\ \chi\neq\chi_0}} |L(1,\chi)|^b + \frac{L(1,\chi_1)^b}{(1-\beta)^b(\log Z)^b}\cdot \tag{10·6}$$

13. On rappelle que χ_1 est réel et que $L(1,\chi_1) > 0$.

On a
$$L(1,\chi)=\sum_{n\leqslant q}\frac{\chi(n)}{n}+O(1).$$
Pour tout entier $B\geqslant\frac12 b$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)\\ \chi\neq\chi_0}}|L(1,\chi)|^{2B}&\ll\varphi(q)+\sum_{\substack{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)\\ \chi\neq\chi_0}}\Big|\sum_{n\geqslant1}\frac{\chi(n)\tau_B(n,q)}{n}\Big|^2\\ &\ll\varphi(q)+\varphi(q)\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\ (a,q)=1}}\Big|\sum_{n\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}\frac{\tau_B(n,q)}{n}-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{(n,q)=1}\frac{\tau_B(n,q)}{n}\Big|^2\end{aligned}$$

où $\tau_B(n,q)$ désigne le nombre de représentations de n sous forme d'un produit de B entiers n'excédant pas q. On a
$$\sum_n\frac{\tau_B(n,q)}{n}\ll(\log q)^B$$
et
$$\begin{aligned}\sum_{n\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}\frac{\tau_B(n,q)}{n}&\ll\frac{\tau_B(a,q)}{a}+\sum_{1\leqslant\ell\leqslant q^{B-1}}\frac{\tau_B(a+\ell q)}{\ell q}\\ &\ll\frac{\tau_B(a,q)}{a}+\frac{1}{q^{2/3}}\end{aligned}$$
Il s'ensuit que
$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\ (a,q)=1}}\Big|\sum_{n\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}\frac{\tau_B(n,q)}{n}-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{n\geqslant1}\frac{\tau_B(n,q)}{n}\Big|^2\ll\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\ (a,q)=1}}\Big\{\frac{\tau_B(a,q)^2}{a^2}+\frac{1}{q^{4/3}}\Big\}\ll1.$$
Nous avons donc obtenu que
$$\sum_{\substack{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)\\ \chi\neq\chi_0}}|L(1,\chi)|^{2B}\ll\varphi(q),$$
et la même majoration vaut *a fortiori* en remplaçant $2B$ par b.(14) De plus, d'après [25], p. 95,
$$L(1,\chi_1)\ll(1-\beta)(\log q)^2.$$
En reportant dans (10·6), nous obtenons donc
$$\sum_{\substack{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)\\ \chi\neq\chi_0}}|L(1,\chi;Z)|^b\ll\varphi(q).$$
On en déduit bien (10·4) en notant que
$$L(1,\chi;y)=L(1,\chi;Z)\prod_{y<p\leqslant Z}\big(1-\chi(p)/p\big)\ll L(1,\chi;Z)\frac{\log Z}{\log y}\cdot$$

14. Voir le lemme 2 de [29] pour un résultat plus précis dans le cas $b=2$.

□

Comme corollaire du Théorème 2, nous obtenons l'assertion suivante où nous posons

$$N_q(x,\chi) := \sum_{n\leqslant x} \chi(n). \tag{10·7}$$

Lemme 1. *Soit $\varepsilon \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$. On a uniformément pour $q \geqslant 2$, $1 \leqslant x \leqslant q$, $y \geqslant 2$,*

$$\sum_{\substack{\chi(\bmod q)\\ \chi\neq\chi_0}} |N_q(x,\chi)|^2 |L(1,\chi;y)| \ll \varphi(q) x \Big(\frac{q\log q}{x}\Big)^{\varepsilon}. \tag{10·8}$$

Démonstration. Soit $b > 2/\varepsilon$. Nous déduisons immédiatement des inégalités de Pólya–Vinogradov et Hölder et de (10·2) que le membre de gauche de (10·8) est

$$\ll q^{1/b}(\log q)^{2/b} S^{(b-1)/b} \varphi(q)^{1/b} \log_2 2q$$

avec

$$S := \sum_{\chi(\bmod q)} |N_q(x,\chi)|^2 \ll x\varphi(q).$$

Cela fournit bien l'estimation souhaitée. □

11. Minoration de $Z_{q,\varrho}(n_k)$

Commençons par un lemme rudimentaire de crible. Posons

$$N_q(x) = |\{m \leqslant x : (m,q) = 1\}|. \tag{11·1}$$

Lemme 2. *On a, uniformément pour $x \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$,*

$$N_q(x) = x\frac{\varphi(q)}{q} + O\big(2^{\omega(q)}\big).$$

Démonstration. On a

$$N_q(x) = \sum_{n\leqslant x} \sum_{d\,|\,(n,q)} \mu(d) = \sum_{d\,|\,q} \mu(d)\Big[\frac{x}{d}\Big] = x\frac{\varphi(q)}{q} + O\big(2^{\omega(q)}\big).$$

□

Posons, pour $k \geqslant 1$,

$$r_k := \exp\exp k$$

et, pour chaque nombre entier $n \geqslant 2$, désignons par n_k le produit des facteurs premiers de n n'excédant pas r_k, soit

$$n_k = \prod_{\substack{p^\nu \| n\\ p\leqslant r_k}} p^\nu.$$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $\varrho \in [0, \log 2[$. Posons encore $Q := q/(\log q)^\varrho$ et désignons par $Z_{q,\varrho}(n_k)$ le nombre de classes de congruence $a\,(\mathrm{mod}\,q)$ telles que $(a,q) = 1$ et admettant une représentation de la forme

$$a \equiv h\overline{d}\,(\mathrm{mod}\,q) \qquad \text{avec} \quad d \,|\, n_k, \quad h \in [1, Q] \quad \text{et} \quad (d,q) = (h,q) = 1. \tag{11·2}$$

Si l'on note

$$\tau(m; a, q) := \sum_{\substack{d \,|\, m \\ d \equiv a \,(\mathrm{mod}\,q)}} 1,$$

alors

$$R(n_k; a, q) := \sum_{\substack{1 \leqslant h \leqslant Q \\ (h,q)=1}} \tau(n_k; \overline{a}h, q) \tag{11·3}$$

est égal au nombre de représentations sous la forme (11·2) de la classe de congruence $a\,(\mathrm{mod}\,q)$ telle que $(a,q) = 1$. Avec ces notations, $Z_{q,\varrho}(n_k)$ s'interprète donc comme le nombre de classes inversibles $a\,(\mathrm{mod}\,q)$ telles que $R(n_k; a, q) \neq 0$.

Désignons par $\tau_q(n_k)$ le nombre de diviseurs de n_k premiers avec q. Comme on a

$$\sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q \\ (a,q)=1}} \tau(n_k; \overline{a}h, q) = \tau_q(n_k) \qquad \big((h,q) = 1\big),$$

une simple intervertion de sommations permet de calculer la valeur moyenne $M_{q,\varrho}(n_k)$ du nombre de représentations d'une classe de congruence sous la forme (11·2) :

$$M_{q,\varrho}(n_k) := \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q \\ (a,q)=1}} R(n_k; a, q) = \frac{N_q(Q)}{\varphi(q)} \tau_q(n_k), \tag{11·4}$$

où $N_q(Q)$ est défini par (11·1). Heuristiquement, le dernier terme se comporte, pour presque tous les nombres entiers n, comme $2^k/(\log q)^\varrho$. Ainsi, si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que $q \leqslant \exp\exp\big((1+\varepsilon_\varrho)k\big)$, avec par exemple $\varepsilon_\varrho = (\log 2 - \varrho)/10$, on en déduit que $M_{q,\varrho}(n_k)$ tend vers l'infini avec q. Dans ces conditions, il paraît raisonnable de pouvoir déduire d'un argument de variance que presque toutes les classes modulo q sont en fait représentables sous la forme (11·2), autrement dit que $Z_{q,\varrho}(n_k)$ est « proche » de $\varphi(q)$. Le lemme suivant établit cela.

Lemme 3. *Soient $\varrho \in [0, \log 2[$ et $\varepsilon_\varrho := (\log 2 - \varrho)/10$. Il existe un nombre entier $q_0 \geqslant 1$ tel que, uniformément pour $x \geqslant r_k$ et $q_0 \leqslant q \leqslant \exp\exp\big((1+\varepsilon_\varrho)k\big)$, on ait*

$$Z_{q,\varrho}(n_k) \geqslant \big(1 - (\log q)^{-\varepsilon_\varrho}\big)\varphi(q)$$

pour tous les nombres entiers $n \leqslant x$ sauf au plus $O\big(x/(\log q)^{\varepsilon_\varrho^2}\big)$ exceptions.

Démonstration. Rappelons la notation $Q := q/(\log q)^\varrho$. Soit $n \leqslant x$. Pour chaque nombre entier h de l'intervalle $[1, Q]$ tel que $(h,q) = 1$, on a

$$\tau(n_k; \overline{a}h, q) = \sum_{d \,|\, n_k} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\,q)} \overline{\chi(\overline{a}h)}\chi(d) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi (\mathrm{mod}\,q)} \chi(a)\overline{\chi(h)}\tau_q(n_k, \chi)$$

où l'on a posé

$$\tau_q(n_k,\chi)=\sum_{d\,|\,n_k}\chi(d).$$

Il s'ensuit que, avec la notation (11·3), on a

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}R(n_k;a,q)^2&=\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant h\leqslant Q\\(h,q)=1}}\tau(n_k;\overline{a}h,q)\Bigg)^2\\&=\frac{1}{\varphi(q)^2}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}\Bigg(\sum_{\chi(\operatorname{mod}q)}\chi(a)\overline{N_q(Q,\chi)}\tau_q(n_k,\chi)\Bigg)^2,\end{aligned}$$

où $N_q(Q,\chi)$ est défini par (10·7). En développant les carrés et en utilisant l'orthogonalité des caractères, il vient alors

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}R(n_k;a,q)^2=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi(\operatorname{mod}q)}|N_q(Q,\chi)|^2|\tau_q(n_k,\chi)|^2. \tag{11·5}$$

Par ailleurs, il découle de l'identité (11·4) et de l'inégalité de Cauchy–Schwarz que

$$\big\{N_q(Q)\tau_q(n_k)\big\}^2=\Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}R(n_k;a,q)\Bigg)^2\leqslant Z_q(n_k)\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}}R(n_k;a,q)^2. \tag{11·6}$$

En combinant (11·5) et (11·6), nous obtenons

$$\big\{N_q(Q)\tau_q(n_k)\big\}^2\leqslant\frac{Z_q(n_k)}{\varphi(q)}\sum_{\chi(\operatorname{mod}q)}|N_q(Q,\chi)|^2|\tau_q(n_k,\chi)|^2$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\varphi(q)-Z_q(n_k)}{\varphi(q)}\leqslant\sum_{\substack{\chi(\operatorname{mod}q)\\\chi\neq\chi_0}}\frac{|N_q(Q,\chi)|^2}{N_q(Q)^2}\frac{|\tau_q(n_k,\chi)|^2}{\tau_q(n_k)^2}. \tag{11·7}$$

Nous allons en déduire que pour tous les nombres entiers $n\leqslant x$ sauf au plus $O\big(x/(\log q)^{\varepsilon_\varrho}\big)$ exceptions, on a

$$Z_q(n_k)\geqslant\varphi(q)\bigg(1-\frac{\varphi(q)(\log q)^{3\varepsilon_\varrho}}{N_q(Q)\tau_q(n_k)}\bigg). \tag{11·8}$$

En effet, le nombre $\mathcal{N}_1$ des entiers $n\leqslant x$ contrevenant à (11·8) n'excède pas

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{N_q(Q)\tau_q(n_k)}{\varphi(q)(\log q)^{3\varepsilon_\varrho}}\bigg(\frac{\varphi(q)-Z_q(n_k)}{\varphi(q)}\bigg).$$

L'inégalité (11·7) implique donc que

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1&\leqslant\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\varphi(q)(\log q)^{3\varepsilon_\varrho}}\sum_{\substack{\chi(\operatorname{mod}q)\\\chi\neq\chi_0}}\frac{|N_q(Q,\chi)|^2}{N_q(Q)}\frac{|\tau_q(n_k,\chi)|^2}{\tau_q(n_k)}\\&=\frac{1}{\varphi(q)N_q(Q)(\log q)^{3\varepsilon_\varrho}}\sum_{\substack{\chi(\operatorname{mod}q)\\\chi\neq\chi_0}}|N_q(Q,\chi)|^2\sum_{n\leqslant x}\frac{|\tau_q(n_k,\chi)|^2}{\tau_q(n_k)}.\end{aligned}$$

Or, si χ n'est pas le caractère principal modulo q, le Corollaire III.3.5.1 de [37] fournit l'estimation

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{|\tau_q(n_k,\chi)|^2}{\tau_q(n_k)}\ll x|L(1,\chi;r_k)|\qquad(x\geqslant r_k),$$

où $L(1,\chi;r_k)$ est défini par (10·1). Compte tenu du lemme 1, cette majoration implique donc que

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\chi(\mathrm{mod}\,q)\\ \chi\neq\chi_0}}|N_q(Q,\chi)|^2\sum_{n\leqslant x}\frac{|\tau_q(n_k,\chi)|^2}{\tau_q(n_k)}&\ll x\sum_{\substack{\chi(\mathrm{mod}\,q)\\ \chi\neq\chi_0}}|N_q(Q,\chi)|^2|L(1,\chi;r_k)|\\&\ll x\varphi(q)Q(\log q)^{\varepsilon_\varrho}.\end{aligned}$$

En appliquant alors successivement cette dernière estimation, le lemme 2 et l'inégalité $\varphi(q)\gg q/\log_2 q$, il vient

$$\mathcal{N}_1\ll\frac{xQ}{N_q(Q)(\log q)^{2\varepsilon_\varrho}}\ll\frac{xq}{\varphi(q)(\log q)^{2\varepsilon_\varrho}}\ll\frac{x}{(\log q)^{\varepsilon_\varrho}}.$$

Désignons par $\mathcal{A}_k(x)$ l'ensemble des entiers $n\leqslant x$ vérifiant (11·8). Nous avons donc

$$|\mathcal{A}_k(x)|\geqslant x\Big(1-\frac{K_1}{(\log q)^{\varepsilon_\varrho}}\Big)$$

pour une constante convenable $K_1>0$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{B}_k(x)$ des entiers $n\leqslant x$ tels que

$$\tau_q(n_k)\geqslant 2^{(1-2\varepsilon_\varrho)k}. \tag{11·9}$$

Le nombre $\mathcal{N}_2$ des entiers $n\leqslant x$ qui ne sont pas dans $\mathcal{B}_k(x)$ est d'ordre inférieur à $x/(\log q)^{\varepsilon_\varrho^2}$. En effet, la méthode de majoration de Rankin fournit, pour tout $v\geqslant 0$,

$$\mathcal{N}_2\leqslant\sum_{n\leqslant x}\frac{2^{(1-2\varepsilon_\varrho)kv}}{\tau_q(n_k)^v}.$$

La dernière somme peut être aisément estimée, par exemple grâce à une nouvelle application du corollaire III.3.5.1 de [37]. En employant la majoration

$$\sum_{p|q}\frac{1}{p}\leqslant\log_3 3q+O(1)\leqslant\log k+O(1),$$

nous obtenons ainsi

$$\mathcal{N}_2\ll kx\mathrm{e}^{A(v)k}\qquad(x\geqslant r_k)$$

avec $A(v):=(1-2\varepsilon_\varrho)v\log 2-1+2^{-v}$. En opérant le choix optimal $2^v=1/(1-2\varepsilon_\varrho)$ et en tenant compte de l'inégalité $k\geqslant(\log_2 q)/(1+\varepsilon_\varrho)$, nous obtenons bien

$$\mathcal{N}_2\ll\frac{x}{(\log q)^{\varepsilon_\varrho^2}}.$$

Nous avons donc

$$|\mathcal{B}_k(x)|\geqslant x\Big(1-\frac{K_2}{(\log q)^{\varepsilon_\varrho^2}}\Big)$$

pour une constante convenable $K_2 > 0$.

Soit $n \in \mathcal{A}_k(x) \cap \mathcal{B}_k(x)$. En combinant (11·8) et (11·9), nous pouvons écrire

$$Z_{q,\varrho}(n_k) \geqslant \varphi(q)\bigg(1 - \frac{\varphi(q)(\log q)^{3\varepsilon_\varrho}}{N_q(Q)2^{(1-2\varepsilon_\varrho)k}}\bigg).$$

En utilisant successivement le lemme 2 et l'inégalité $q \leqslant \exp\exp\big((1+\varepsilon_\varrho)k\big)$, nous obtenons

$$\frac{\varphi(q)(\log q)^{3\varepsilon_\varrho}}{N_q(Q)2^{(1-2\varepsilon_\varrho)k}} \ll \frac{(\log q)^{\varrho+3\varepsilon_\varrho}}{2^{(1-2\varepsilon_\varrho)k}} \ll \frac{1}{(\log q)^{2\varepsilon_\varrho}}.$$

Nous avons donc obtenu, pour q_0 assez grand,

$$Z_{q,\varrho}(n_k) \geqslant \varphi(q)\big(1 - (\log q)^{-\varepsilon_\varrho}\big).$$

L'inégalité précédente est ainsi vérifiée pour tous les nombres entiers n de l'ensemble $\mathcal{A}_k(x) \cap \mathcal{B}_k(x)$, autrement dit, pour tous les entiers $n \leqslant x$ sauf au plus $O\big(x/(\log q)^{\varepsilon_\varrho^2}\big)$ exceptions. □

12. Démonstration du théorème 1

Nous nous contentons d'établir la majoration contenue dans le théorème 1. La minoration découle de la remarque qui suit le corollaire 9 de [41]. La preuve développée de cette minoration est dans l'article [32].

Il est bien connu qu'un nombre normal n possède $\tau(n) = (\log n)^{\log 2+o(1)}$ diviseurs. Il revient donc au même de démontrer la majoration du théorème 1 ou l'inégalité

$$\min_{d \mid n} \|d\vartheta\| \leqslant \frac{1}{(\log n)^\varrho} \qquad \text{(pp)} \tag{12·1}$$

pour $\vartheta \in \mathcal{E}$ et un ϱ quelconque de l'intervalle $[0, \log 2[$. Dans la suite de cette démonstration, nous fixons $\varrho \in [0, \log 2[$.

Commençons par introduire quelques notations. Soit ϱ_1 un nombre réel tel que $\varrho < \varrho_1 < \log 2$. Nous posons $\varepsilon_0 = \varrho_1 - \varrho$ et $\varepsilon_1 = (\log 2 - \varrho_1)/10$. Nous fixons un nombre réel $x \geqslant x_0$, où x_0 sera choisi assez grand au cours de la démonstration, et nous définissons $L := [(1-\varepsilon_0)\log_2 x]$ et $M = [(1-\varepsilon_0/2)\log_2 x]$. Pour un nombre entier k de l'intervalle $[L, M]$, nous rappelons que r_k et n_k sont définis par

$$r_k = \exp\exp k \qquad \text{et} \qquad n_k = \prod_{\substack{p^\nu \| n \\ p \leqslant r_k}} p^\nu$$

et nous introduisons, pour chacun des nombres réels $\vartheta \in \mathcal{E}$, l'ensemble

$$\mathcal{S}_k(x) = \big\{n \leqslant x : \min_{d \mid n_k} \|\vartheta d\| > \eta(x)\big\} \qquad \text{où} \quad \eta(x) = \frac{1}{(\log x)^\varrho}.$$

Enfin, rappelons que $\{p_j/q_j\}_{j \geqslant 0}$ désigne la suite des réduites de ϑ.

Nous allons démontrer que le cardinal de $\mathcal{S}_M(x)$ est $o(x)$ ce qui fournira *a fortiori* le résultat (12·1). Le raisonnement s'appuie sur l'idée que si n est dans $\mathcal{S}_k(x)$ (avec $k \in [L, M]$) alors la probabilité conditionnelle que n soit encore dans $\mathcal{S}_{k+r}(x)$, avec r « petit », n'est pas trop proche de 1. Un raisonnement par récurrence permet alors de conclure.

Nous découpons la démonstration en trois étapes. Tout d'abord, nous établissons une propriété d'approximation rationnelle de $\vartheta \in \mathcal{E}$ par l'une de ses réduites dont on contrôle la taille du dénominateur q_j (résultat (12·2)). Nous utilisons pour cela l'hypothèse de croissance modérée de ces dénominateurs pour les éléments de $\mathcal{E}$ (inégalité (9·2)).

Dans un deuxième temps, nous procédons à une étape de « normalisation » des entiers $n \in \mathcal{S}_k(x)$. Nous conservons ainsi des nombres entiers dont, d'une part, le produit des petits facteurs premiers n'est pas anormalement grand et dont, d'autre part, l'ensemble des diviseurs de n_k possède de bonnes propriétés de congruence modulo q_j.

La dernière étape est consacrée à la mise en forme du raisonnement de probabilité conditionnelle et à la récurrence qui le suit. Cette partie de la démonstration se subdivise elle-même en plusieurs étapes sur lesquelles nous reviendrons.

Soit $\vartheta \in \mathcal{E}$. Il découle de (9·2) qu'il existe une fonction $w(x)$ tendant vers l'infini avec x telle que $\log w(x) = o(\log_2 x)$ et telle que, pour chaque entier k de l'intervalle $[L, M]$, il existe un nombre entier $j = j(k)$ pour lequel q_j satisfait l'encadrement

$$w(x)\mathrm{e}^k < \log q_j \leqslant w(x)^2\mathrm{e}^k. \tag{12·2}$$

Nous fixons $\vartheta \in \mathcal{E}$, $k \in [L, M]$ et nous considèrons le nombre entier $j = j(k)$ pour lequel la double inégalité (12·2) est satisfaite.

Commençons par « normaliser » les entiers de $\mathcal{S}_k(x)$. Pour cela, nous introduisons l'ensemble $\mathcal{S}'_k(x)$ des entiers n de $\mathcal{S}_k(x)$ tels que

(a) $n_k \leqslant q_j^{1/4}$,

(b) $Z_{q_j,\varrho_1}(n_k) \geqslant \big(1 - (\log q_j)^{-\varepsilon_1}\big)\varphi(q_j)$.[15]

La condition (a) est vérifiée pour tous les nombres entiers $n \leqslant x$ sauf au plus $O\big(x\,\mathrm{e}^{-w(x)/8}\big)$ exceptions. Cela découle de l'exercice III.5.6 de [42] et de (12·2). Par ailleurs, le lemme 3 implique que la condition (b) est vérifiée sauf pour au plus $O\big(x/(\log x)^{\varepsilon_1^2}\big)$ entiers $n \leqslant x$. Nous avons donc obtenu, en notant $S_k(x)$ et $S'_k(x)$ les cardinaux respectifs de $\mathcal{S}_k(x)$ et $\mathcal{S}'_k(x)$, que

$$S_k(x) = S'_k(x) + o(x). \tag{12·3}$$

Quelques notations supplémentaires sont à présent nécessaires. Pour $n \in \mathcal{S}'_k(x)$, nous notons $\mathcal{Z}_{n_k}$ l'ensemble des classes inversibles $b\,(\mathrm{mod}\,q_j)$ pour lesquelles il existe un diviseur d de n_k et un entier h de l'intervalle $\big[1, q_j/(\log q_j)^{\varrho_1}\big]$ tel que $(h, q_j) = 1$ et $d \equiv \overline{b}\,q_{j-1}h\,(\mathrm{mod}\,q_j)$. Par ailleurs, nous considérons l'ensemble $\mathcal{F}_k(x)$ des entiers $n \in \mathcal{S}'_k(x)$ qui vérifient la propriété suivante :

(c) $\exists p \mid n,\ q_j^{4/3} < p \leqslant q_j^{3/2},\ p\,(\mathrm{mod}\,q_j) \in \mathcal{Z}_{n_k}$.

15. Rappelons que $Z_{q_j,\varrho_1}(n_k)$ désigne le nombre des classes inversibles $a\,(\mathrm{mod}\,q_j)$ pour lesquelles il existe un diviseur d de n_k et un entier h de l'intervalle $[1, q_j/(\log q_j)^{\varrho_1}]$ tels que $(h, q_j) = 1$ et $d \equiv \overline{a}h\,(\mathrm{mod}\,q_j)$.

Le cardinal de $\mathcal{F}_k(x)$ est noté $F_k(x)$.

Heuristiquement, nous pouvons interpréter $\mathcal{Z}_{n_k}$ comme un ensemble de « bonnes » classes de congruence pour notre problème. En effet, nous allons démontrer que les nombres entiers n de $\mathcal{F}_k(x)$ (qui se caractérisent donc par l'existence d'un de leurs facteurs premiers $p \in \left]q_j^{4/3}, q_j^{3/2}\right]$ appartenant à l'une de ces bonnes classes) vérifient l'inégalité attendue $\min_{d\,|\,n} \|\vartheta d\| \leqslant \eta(x)$. Nous montrons pour cela que ces entiers n n'appartiennent pas à l'ensemble $\mathcal{S}_{k+r}(x)$ pour un certain $r > 0$ tel que $r = o(M - L)$, c'est-à-dire que $F_k(x) \leqslant S_k(x) - S_{k+r}(x)$ (résultat (12·4)).

La propriété (b), vérifiée en particulier par les éléments n de $\mathcal{F}_k(x)$, constitue alors le point clef de cette démonstration. Elle permet en effet de justifier que le cardinal de $\mathcal{Z}_{n_k}$ est proche de $\varphi(q_j)$, autrement dit que la plupart des classes de congruence modulo q_j sont « bonnes ». Cela laisse suffisamment de possibilités aux facteurs premiers de n compris entre $q_j^{4/3}$ et $q_j^{3/2}$ d'appartenir à l'une de ces classes. Nous en déduisons alors, à l'aide du crible, que $F_k(x)$ représente, à $o(x)$ près, une proportion positive de $S_k(x)$ (résultat (12·5)).

La dernière étape de cette démonstration s'appuie sur un raisonnement par l'absurde. Partant de l'hypothèse que $S_M \gg x$, nous déduisons des deux étapes précédentes et de (12·3) qu'il existe une constante $c < 1$ telle que, pour tout nombre entier k de l'intervalle $[L, M]$, on ait $S_{k+r}(x) \leqslant c\, S_k(x)$. L'écart entre k et $k+r$ étant en $o(M-L)$, on peut alors itérer $N(x)$ fois (avec $N(x) \to +\infty$) ce processus pour obtenir une contradiction.

Démontrons que

$$(12\cdot4) \qquad F_k(x) \leqslant S_k(x) - S_{k+r}(x) \qquad \text{où} \qquad r := [2\log w(x)] + 2.$$

Si $n \in \mathcal{F}_k(x)$ alors, d'après (c), n possède un facteur premier p, $q_j^{4/3} < p \leqslant q_j^{3/2}$, tel qu'il existe un diviseur d de n_k et un entier h de l'intervalle $\left[1, q_j/(\log q_j)^{\varrho_1}\right]$ vérifiant $(h, q_j) = 1$ et $d \equiv \overline{p}\, q_{j-1} h \,(\mathrm{mod}\, q_j)$. Il existe donc aussi un nombre entier ℓ tel que $dp = q_{j-1}h + \ell q_j$. Alors

$$\begin{aligned} dp\vartheta &= (q_{j-1}h + \ell q_j)\Big(\frac{p_j}{q_j} + \frac{\beta}{q_j^2}\Big) \qquad \text{avec} \quad |\beta| \leqslant 1 \\ &\equiv \frac{h}{q_j} + \beta\frac{q_{j-1}}{q_j}\frac{h}{q_j} + \beta\frac{\ell}{q_j} \quad (\mathrm{mod}\,1). \end{aligned}$$

Comme $2 \leqslant p \leqslant q_j^{3/2}$, $1 \leqslant d \leqslant n_k \leqslant q_j^{1/4}$, $1 \leqslant q_{j-1} \leqslant q_j$ et $1 \leqslant h \leqslant q_j/(\log q_j)^{\varrho_1}$, on a $|\ell| \leqslant \max\{dp, q_{j-1}h\}/q_j \leqslant q_j/(\log q_j)^{\varrho_1}$ et donc aussi

$$\Big|\beta\frac{q_{j-1}}{q_j}\frac{h}{q_j}\Big| \leqslant \frac{h}{q_j} \leqslant \frac{1}{(\log q_j)^{\varrho_1}} \qquad \text{et} \qquad \Big|\beta\frac{\ell}{q_j}\Big| \leqslant \frac{1}{(\log q_j)^{\varrho_1}}\cdot$$

Il s'ensuit que

$$\|dp\vartheta\| \leqslant \frac{3}{(\log q_j)^{\varrho_1}}\cdot$$

Or, pour x_0 assez grand, on a $(\log q_j)^{\varrho_1} \geqslant \big\{w(x)(\log x)^{1-\varepsilon_0}\big\}^{\varrho_1} \geqslant 3(\log x)^{\varrho}$ car $(1-\varepsilon_0)\varrho_1 > \varrho$, donc

$$\|dp\vartheta\| \leqslant \frac{1}{(\log x)^{\varrho}}\cdot$$

Nous avons donc démontré l'existence d'un diviseur $d' = dp$ de n tel que $P^+(d') \leqslant q_j^{3/2}$ et $\|\vartheta d'\| \leqslant \eta(x)$. Autrement dit, si l'on pose $r = [2\log w(x)] + 2$, alors $k + r \geqslant \log_2 q_j^{3/2}$ et donc $n \notin \mathcal{S}_{k+r}(x)$. On a donc bien (12·4).

Nous allons démontrer que

$$F_k(x) \gg S_k(x) + o(x). \tag{12·5}$$

Nous réservons, dans la fin de cette démonstration, la lettre m pour désigner un entier générique satisfaisant $P^+(m) \leqslant r_k$, $\min_{d\,|\,m} \|\vartheta d\| > \eta(x)$ et les conditions (a), (b) avec m à la place de n_k. Pour chaque entier m, nous adoptons la notation $\widetilde{m}$ pour représenter un entier quelconque tel que

(i) $P^-(\widetilde{m}) > r_k$,

(ii) $\exists p \,|\, \widetilde{m},\ q_j^{4/3} < p \leqslant q_j^{3/2},\ p \,(\mathrm{mod}\, q_j) \in \mathcal{Z}_m$.

On peut alors écrire que

$$F_k(x) = \sum_{m \leqslant x} \sum_{\widetilde{m} \leqslant x/m} 1.$$

Pour chaque entier m, on a

$$\sum_{\widetilde{m} \leqslant x/m} 1 = \sum_{\substack{q_j^{4/3} < p \leqslant q_j^{3/2} \\ p\,(\mathrm{mod}\, q_j) \in \mathcal{Z}_m}} \Phi_j\Big(\frac{x}{mp}\Big),$$

où $\Phi_j(x)$ désigne le nombre des entiers n'excédant pas x et dont tous les facteurs premiers sont dans $\big]r_k, q_j^{4/3}\big] \cup \big]q_j^{3/2}, +\infty\big[$. Comme $m \leqslant q_j^{1/4}$ et $p \leqslant q_j^{3/2}$, le crible de Brun fournit, pour chaque entier m, l'estimation $\Phi_j(x/mp) \asymp x/(mp\mathrm{e}^k)$. Nous obtenons donc

$$F_k(x) \asymp \frac{x}{\mathrm{e}^k} \sum_{m \leqslant x} \frac{1}{m} \sum_{\substack{q_j^{4/3} < p \leqslant q_j^{3/2} \\ p\,(\mathrm{mod}\, q_j) \in \mathcal{Z}_m}} \frac{1}{p}\cdot \tag{12·6}$$

En notant $\overline{\mathcal{Z}_m}$ le complémentaire de $\mathcal{Z}_m$ dans l'ensemble des résidus modulo q_j, on a

$$\sum_{\substack{q_j^{4/3} < p \leqslant q_j^{3/2} \\ p\,(\mathrm{mod}\, q_j) \notin \mathcal{Z}_m}} \frac{1}{p} = \sum_{a \in \overline{\mathcal{Z}_m}} \sum_{\substack{q_j^{4/3} < p \leqslant q_j^{3/2} \\ p \equiv a\,(\mathrm{mod}\, q_j)}} \frac{1}{p}\cdot$$

D'après le théorème de Brun–Titchmarsh, la somme intérieure est $\ll 1/\varphi(q_j)$, donc

$$\sum_{\substack{q_j^{4/3} < p \leqslant q_j^{3/2} \\ p\,(\mathrm{mod}\, q_j) \notin \mathcal{Z}_m}} \frac{1}{p} \ll \frac{|\overline{\mathcal{Z}_m}|}{\varphi(q_j)}\cdot$$

L'ensemble $\mathcal{Z}_m$ peut être facilement mis en bijection avec l'ensemble des classes inversibles $a \,(\mathrm{mod}\, q_j)$ pour lesquelles il existe un diviseur d de m et un entier h de l'intervalle $\big[1, q_j/(\log q_j)^{\varrho_1}\big]$ tels que $(h, q_j) = 1$ et $d \equiv \overline{a}h \,(\mathrm{mod}\, q_j)$. Cela résulte de l'inversibilité de q_{j-1} modulo q_j, justifiée par l'identité $p_j q_{j-1} - p_{j-1} q_j = \pm 1$. On a donc $|\mathcal{Z}_m| = Z_{q_j, \varrho_1}(m)$. De la condition (b) et de l'inégalité $\log q_j \gg (\log x)^{1-\varepsilon_0}$ (qui résulte de (12·2) et du fait que $k \in [L, M]$), il découle alors

$$\big|\overline{\mathcal{Z}_m}\big| = \varphi(q_j) - Z_{q_j, \varrho_1}(n_k) \leqslant \frac{\varphi(q_j)}{(\log q_j)^{\varepsilon_1}} \ll \frac{\varphi(q_j)}{(\log x)^{\varepsilon_1(1-\varepsilon_0)}}\cdot \tag{12·7}$$

On en déduit successivement que

$$\sum_{\substack{q_j^{4/3}<p\leqslant q_j^{3/2}\\ p\,(\mathrm{mod}\,q_j)\notin\mathcal{Z}_m}}\frac{1}{p}\ll\frac{1}{(\log x)^{\varepsilon_1(1-\varepsilon_0)}}$$

puis que

$$\sum_{\substack{q_j^{4/3}<p\leqslant q_j^{3/2}\\ p\,(\mathrm{mod}\,q_j)\in\mathcal{Z}_m}}\frac{1}{p}\asymp\sum_{q_j^{4/3}<p\leqslant q_j^{3/2}}\frac{1}{p}\asymp 1.$$

L'estimation (12·6) devient donc

$$F_k(x)\asymp\frac{x}{\mathrm{e}^k}\sum_{m\leqslant x}\frac{1}{m}. \tag{12·8}$$

Par ailleurs, avec les mêmes notations, on a $S_k'(x)=\sum_{m\leqslant x}\Phi(x/m,r_k)$. En appliquant à nouveau le crible de Brun, on a donc

$$S_k'(x)\asymp\frac{x}{\mathrm{e}^k}\sum_{m\leqslant x}\frac{1}{m}. \tag{12·9}$$

En combinant (12·8) et (12·9), il s'ensuit que

$$F_k(x)\asymp S_k'(x).$$

Cette majoration associée à (12·3) fournit alors (12·5).

Pour conclure, nous allons démontrer par l'absurde que $S_M(x)=o(x)$.

Supposons qu'au contraire $S_M(x)\gg x$. Alors, uniformément pour $k\in[L,M]$, on a $S_k(x)\gg x$. Les inégalités (12·4) et (12·5) impliquent donc que $S_k(x)-S_{k+r}(x)\gg S_k(x)$. On en déduit l'existence d'une constante $0<c<1$ telle que

$$S_{k+r}(x)\leqslant cS_k(x).$$

Or $r=[2\log w(x)]+2$ et $\log w(x)=o(\log_2 x)$, donc il existe une fonction $N(x)$, dépendant de ε_0, à valeurs entières et tendant vers l'infini avec x telle que

$$r\leqslant\frac{M-L}{N(x)}\cdot$$

Partant de $k_0=L$, nous construisons donc par le procédé ci-dessus un nombre entier k_1 tel que $S_{k_1}(x)\leqslant cS_{k_0}(x)$ et $k_1-k_0\leqslant(M-L)/N(x)$. Nous itérons ensuite $N(x)-1$ fois ce processus afin d'obtenir $k_0=L$, k_1, k_2,…, $k_{N(x)}<M$ tels que $S_{k_j}(x)\leqslant cS_{k_{j-1}}(x)$ $\big(1\leqslant j\leqslant N(x)\big)$. Par induction, il suit

$$S_M(x)\leqslant S_{k_{N(x)}}(x)\leqslant c^{N(x)}S_{k_0}(x)=o(x).$$

On aboutit donc bien à une contradiction. Cela achève notre démonstration. □

Bibliographie

[25] Davenport H., *Multiplicative number theory*, seconde éd., Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.

[26] Erdős P. & Kac M., On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **25** (1939), 206—207.

[27] Erdős P. & Tenenbaum G., Ensembles de multiples de suites finies, *Discrete Math.* **200** (1999), 181—203.

[28] Fouvry E. & Tenenbaum G., Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **63** (1991), 449—494.

[29] Hall R.R., On the distribution of divisors in residue classes $(\mathrm{mod}\, k)$, *J. number theory* **2**, n°1 (1970), 168—188.

[30] Hall R.R. & Tenenbaum G., On Behrend sequences, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **112** (1992), 467—482.

[31] Hardy G.H. & Ramanujan S., The normal number of prime factors of a number n, *Quart. J. Math.* **48** (1917), 76—92.

[32] Kerner S. & Tenenbaum G., Sur la répartition divisorielle normale de $\vartheta d \,(\mathrm{mod}\, 1)$, en préparation.

[33] Khintchine A. Ya., *Continued fractions*, P. Noordhoff Ltd. Groningen, The Netherlands (1963).

[34] Khintchine A. Ya., Zur metrischen Kettenbruch-theorie, *Compositio Mathematica* **3**, part 2 (1936), 275—285.

[35] Maier H. & Tenenbaum G., On the set of divisors of an integer, *Invent. math.* **76** (1984), 121—128.

[36] Mendès France M. & Tenenbaum G., Systèmes de points, diviseurs et structure fractale, *Bull. Soc. Math. France* **121** (1993), 197—225.

[37] Tenenbaum G., *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, seconde éd., Cours spécialisés 1, Soc. Math. France (1995).

[38] Tenenbaum G., Crible d'Ératosthène et modèle de Kubilius, in : K. Győry, H. Iwaniec, J. Urbanowicz (eds.), *Number theory in progress*, Proceedings of the conference in honor of Andrzej Schinzel, Zakopane, Poland 1997, 1099—1129, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1999.

[39] Tenenbaum G., Qu'est-ce qu'un entier normal ?, in : É. Charpentier (Éd.), *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*, École doctorale de l'université de Bordeaux 1, Éds. Cassini, à paraître, 2002.

[40] Tenenbaum G., On block Behrend sequences, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **120** (1996), 355—367.

[41] Tenenbaum G., Uniform distribution on divisors and Behrend sequences, *Enseign. Math.* **42** (1996), 355—367.

[42] Tenenbaum G., en collaboration avec Wu J., *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés 2, Soc. Math. France (1996).

U.F.R. STMIA
École doctorale IAE+M
DFD Mathématiques

Cette thèse est consacrée à l'étude de la répartition de trois ensembles de nombres entiers caractérisés par certaines propriétés de leurs diviseurs. Dans la première partie, nous utilisons la méthode du col en une variable pour étudier la densité naturelle de l'ensemble des entiers sans facteur carré dont le k-ième facteur premier est fixé. La deuxième partie de la thèse est consacrée à l'estimation du nombre $\pi_k(x)$ des entiers n'excédant pas x ayant un nombre prescrit k de facteurs premiers. Nous évaluons cette quantité à l'aide de la méthode du col en dimension 2. Nous obtenons ainsi une évaluation uniforme de $\pi_k(x)$ sur un domaine quasi optimal pour le couple de paramètres (x, k) et nous en déduisons des renseignements nouveaux sur le comportement local de la suite $k \mapsto \pi_k(x)$. Cela nous permet à la fois de donner une nouvelle démonstration de la conjecture d'Erdős concernant l'unimodalité de $k \mapsto \pi_k(x)$, établie en 1990 par Balazard, et de fournir un équivalent asymptotique du rapport $\pi_{k+1}(x)/\pi(x)$. La dernière partie est consacrée à l'étude de la répartition divisorielle normale de ϑd modulo 1, où ϑ désigne un nombre réel et d parcourt l'ensemble des diviseurs d'un entier normal. Nous établissons, pour une large classe de nombres irrationnels ϑ, que les nombres ϑd ont une répartition modulo 1 régulière.

Distribution of integers with divisorial constraints

This thesis deals with the distribution of three sets of integers characterized by some properties on their divisors. In the first part we use the one-dimensional saddle point method to study the density of squarefree integers whose k-th prime factor is fixed. The second part is concerned with the estimate of the number $\pi_k(x)$ of integers lower than x which have exactly k prime factors, obtained by using the saddle point method in dimension 2. We get a uniform estimate for $\pi_k(x)$ in a domain of parameters (x, k) near to the optimum, from which we deduce new informations on the local behavior of $k \mapsto \pi_k(x)$. This provides a new proof of the Erdős conjecture about the unimodality of $k \mapsto \pi_k(x)$, proved in 1990 by Balazard, and even an asymptotic estimate of the quotient $\pi_{k+1}(x)/\pi(x)$. At last, we study the normal divisorial distribution of ϑd modulo 1, where ϑ is a real number and d exhausts the divisors of any normal integer: we prove in this setting that the real numbers ϑd have a regular distribution modulo 1, for a large class of irrational numbers ϑ.

Discipline : Mathématiques

Mots Clés : conjecture d'Erdős, diviseurs, entiers normaux, équirépartition, fonction ω, fonctions de répartition, fonctions L de Dirichlet, fractions continues, méthode du col, nombres premiers, suite de Behrend, théorie analytique et probabiliste des nombres.

Code A.M.S. primaire : 11N25, 11N37
secondaire : 11A55, 11M41.

Institut Élie Cartan CNRS UMR 9973
Faculté des Sciences - B.P. 239 - 54506 Vandœuvre-lès-Nancy CEDEX